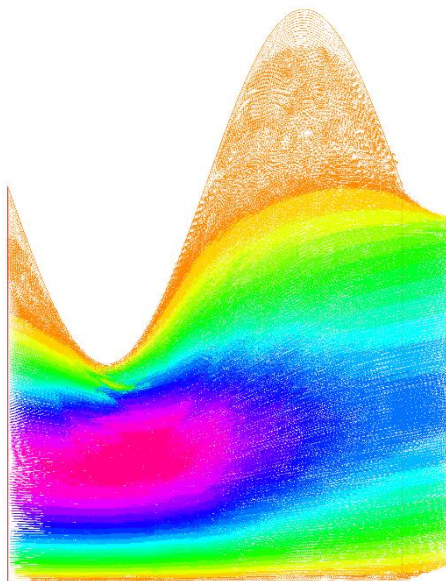


Stage de Master 2

# Introduction aux bases réduites

Pierre Mollo



Encadrement :

**Stéphanie Salmon**, Laboratoire de mathématiques, Université de Reims Champagne-Ardenne



# Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe du laboratoire de mathématiques de Reims de m'avoir accueilli durant ce stage.

Je remercie Stéphanie Salmon de m'avoir proposé ce stage et de m'avoir ainsi initié à la recherche. Je la remercie aussi de m'avoir offert la possibilité de continuer la recherche en me proposant une thèse de doctorat sous sa direction.

Finalement je la remercie aussi pour tous ses enseignements, ses conseils et ses corrections durant mon stage et mes deux années de master.

Je remercie par ailleurs François Lefevre, Stéphanie Lohrengel, Laurent Di Menza, ainsi que tous les autres intervenants du master Calcul Scientifique pour leurs excellents enseignements et pour m'avoir donné l'envie de continuer.

Je remercie de plus les doctorants du laboratoire : Ana Bernal, Quentin Labriet, Serge Masson, Farah Oumri et Océane Saincir, qui m'ont permis de m'intégrer à l'équipe et avec qui j'ai passé de bons moments. Je remercie enfin l'ingénieur de recherche Guillaume Dollé pour toute l'aide qu'il m'a proférée durant mon stage.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>I Principe et méthodes</b>	<b>7</b>
<b>1 Fondement théorique</b>	<b>8</b>
1.1 Conditions d'utilisation . . . . .	8
1.2 Méthodes de construction . . . . .	9
1.2.1 Base naïve . . . . .	9
1.2.2 Base orthonormée . . . . .	9
1.2.3 Algorithme glouton . . . . .	10
1.2.4 Décomposition aux valeurs propres (POD) . . . . .	11
1.3 Méthode d'interpolation empirique (EIM) . . . . .	12
1.3.1 Principe de la méthode . . . . .	12
1.3.2 Exemples . . . . .	14
<b>II Équations de la chaleur</b>	<b>17</b>
<b>2 Équations de la chaleur stationnaires</b>	<b>17</b>
2.1 Présentation du problème . . . . .	17
2.2 Discrétisation et résolution EF . . . . .	21
2.3 Problème en base réduite . . . . .	22
2.4 Exemple . . . . .	25
<b>3 Équation de la chaleur instationnaires</b>	<b>28</b>
3.1 Présentation du problème . . . . .	28
3.2 Discrétisation et résolution EF . . . . .	30
3.3 Problème en base réduite . . . . .	31
<b>III Équations de Stokes</b>	<b>35</b>
<b>4 Équations de Stokes stationnaires</b>	<b>35</b>
4.1 Présentation du problème . . . . .	35
4.2 Discrétisation et résolution en éléments finis . . . . .	41
4.3 Problème en base réduite . . . . .	42
4.3.1 Approche classique . . . . .	43
4.3.2 Approche monolithique . . . . .	44
4.4 Observations et remarques . . . . .	45
4.5 Exemple . . . . .	46
<b>5 Équations de Stokes à géométrie paramétrée</b>	<b>48</b>
5.1 Présentation du problème . . . . .	48
5.2 Déformation des opérateurs . . . . .	50
5.3 Linéarisation des déformations affines . . . . .	52

5.4	Problème en base réduite . . . . .	54
5.4.1	Approche classique . . . . .	54
5.4.2	Approche monolithique . . . . .	55
5.5	Linéarisation des déformations non-affines . . . . .	57
5.6	Exemples . . . . .	60
5.6.1	Exemple de la sténose . . . . .	60
5.6.2	Exemple de la bifurcation à géométrie paramétrée . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Équations de Stokes instationnaires</b>	<b>73</b>
6.1	Présentation du problème . . . . .	73
6.2	Discrétisation et résolution en éléments finis . . . . .	76
6.3	Problème en base réduite . . . . .	78
<b>IV</b>	<b>Perspectives</b>	<b>81</b>
<b>7</b>	<b>Extension aux cas multi-domaine</b>	<b>81</b>
7.1	Subdivision en deux sous-domaines . . . . .	81
7.1.1	Approche monolithique . . . . .	85
7.1.2	Approche découplée . . . . .	86
7.2	Les cas à sous-domaines multiples . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Reconstruire la pression à partir de la vitesse</b>	<b>89</b>
<b>9</b>	<b>Estimateur d'erreur</b>	<b>89</b>
<b>10</b>	<b>Extrapolation</b>	<b>90</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>91</b>

# Introduction

Ce document est le fruit des travaux effectués durant un stage de 6 mois proposé par le laboratoire de mathématiques de Reims. Ce stage réalisé sous la direction de Stéphanie Salmon, a été financé par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet ANR HANUMAN 18-CE45-0014-01. Ce projet, qui a débuté en janvier 2019, a pour sujet : «Human and Animal NUmerical Models for the crANio-spinal system»<sup>1</sup>, c'est-à-dire la création et l'exploitation de modèles numériques du système cranio-spinal pour l'Homme et l'animal. Le stage et ce document porte sur la partie «modèles numériques» du projet.

Certains modèles du système cranio-spinal existent déjà, mais ils ne sont pas suffisamment convaincants, nous cherchons donc à les améliorer. L'un des problèmes sur lequel nous nous heurtons actuellement est le temps de calculs engendré par nos nouveaux modèles. L'objet de ce stage est ainsi d'étudier la méthodes des bases réduites avec comme motivation de pouvoir les utiliser dans nos nouveaux modèles pour les rendre plus pertinents. Cependant la méthode des bases réduites est en réalité un environnement très riche, qui comporte de nombreuses méthodes. À travers ce document nous allons donc tenter de broser un portait de ces différentes méthodes.

À cette fin, nous commencerons par une courte partie sur le principe de ces bases réduites, ainsi que sur les conditions dans lesquelles nous pouvons les déployer. Dans une deuxième partie nous verrons alors comment les utiliser sur les équations de la chaleur (stationnaires et instationnaires). Ces équations ont en effet l'avantage d'être assez simple à traiter et constituent un bon terrain de jeu pour débiter avec les bases réduites. Dans la troisième partie de ce document, nous passerons à des problèmes qui nous intéressent plus directement en étudiant les équations de Stokes (stationnaires et instationnaires). Ces équations servent à simuler les écoulements à forte viscosité (ou faible vitesse) et sont un premier pas vers les équations de Navier-Stokes que nous souhaitons utiliser sur nos modèles numériques. Dans une dernière partie, nous traiterons d'une perspective intéressante concernant la décomposition de domaine. Puis nous débattrons sur l'utilisation des bases réduites pour reconstruire la pression en connaissant la vitesse. Finalement nous conclurons par quelques remarques générales sur les possibles utilisations des bases réduites.

---

1. Pour plus d'informations sur le projet : <http://salmon.perso.math.cnrs.fr/hanuman.html>

## Première partie

# Principe et méthodes

L'utilisation d'une base réduite est une méthode de réduction de complexité. Cependant, son utilisation n'est pas efficace pour tous les problèmes. Les problèmes concernés par cette méthode sont les Équations aux Dérivées Partielles Paramétrées (EDPP). L'idée principale est de réduire la dimension de l'espace dans lequel nous cherchons la solution. Cet espace de faible dimension pourra alors être approché par une base avec peu d'éléments, nous appellerons cette base la «base réduite» (BR). Tout l'enjeu des méthodes suivantes est alors de construire au mieux une base réduite efficace. Quelle que soit la méthode utilisée, le principe est toujours de prendre des solutions  $u(\mu)$  pré-calculées, où  $\mu$  est le paramètre, comme éléments de la base réduite.

Cette volonté d'utiliser des solutions pré-calculées pour construire de nouvelles solutions peut sembler peu avantageuse. Cependant, cette technique prend tout son sens si nous l'inscrivons dans une stratégie *offline/online*. Dans ce genre de stratégie, nous souhaitons résoudre très rapidement des problèmes (partie *online*) en utilisant une préparation sur les données et sur le problème, qui peut demander du temps (partie *offline*). Le contexte des bases réduites correspond parfaitement à ce type de stratégie. En effet nous pouvons facilement envisager la construction d'une base réduite dans la partie *offline*, car cette construction se fait par résolution de nombreux problèmes aux Éléments Finis (EF) et nécessite donc un certain temps. Puis nous pouvons ensuite utiliser cette base réduite dans la partie *online* pour résoudre rapidement de nouveaux problèmes, cette fois-ci la résolution se fait dans un espace de faible dimension et peut donc être extrêmement rapide.

Dans la partie qui suit, nous allons voir plus précisément quelles conditions doivent être réunies pour que nos approches soient valides et efficaces. Nous passerons ensuite en revue plusieurs méthodes de construction de bases réduites.

# 1 Fondement théorique

## 1.1 Conditions d'utilisation

Puisque nous cherchons à approcher une solution pour un paramètre donné, en fonction de solutions pour d'autres valeurs de ce même paramètre, il faut que toutes ces solutions présentent des similitudes. Afin de mesurer la régularité des solutions par rapport au paramètre  $\mu$ , nous introduisons l'épaisseur de Kolmogorov.

**Définition 1.** Soit  $X$  un espace vectoriel normé,  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble et  $X$  et  $X_n$  un sous-ensemble de  $X$  de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . L'épaisseur de Kolmogorov de  $\mathcal{S}$  dans  $X$  est donnée par :

$$d_n(\mathcal{S}, X) = \inf_{X_n} \sup_{u \in \mathcal{S}} \inf_{u_n \in X_n} \|u - u_n\|_X$$

Si nous posons  $\mathcal{S} := \{u(\mu), \mu \in \mathcal{D}\}$ , résoudre notre problème pour  $\mu$  quelconque revient à trouver  $u(\mu)$  dans  $\mathcal{S}$ . Pour que la méthode des bases réduites fonctionne, il faut que  $\mathcal{S}$  soit de faible épaisseur de Kolmogorov.

En ce qui concerne le paramètre  $\mu$ , il n'y a pas réellement de restrictions. Par commodité nous utiliserons le plus souvent que  $\mu \in \mathcal{D}$ , avec  $\mathcal{D}$  un produit cartésien d'intervalles. Soit  $\mathcal{D}$  de la forme :

$$\mathcal{D} = ]\mu_1^{min}, \mu_1^{max}[ \times ]\mu_2^{min}, \mu_2^{max}[ \times \dots \times ]\mu_p^{min}, \mu_p^{max}[$$

Un paramètre  $\mu$  sera donc un vecteur de cet ensemble  $\mathcal{D}$  de dimension  $N_{\mathcal{D}}$ .



## 1.2 Méthodes de construction

La méthode des bases réduites fonctionne théoriquement quel que soit l'échantillon  $S_P = \{\mu_p\}_{p=1}^P$  considéré. Cependant, plusieurs questions se posent naturellement : Quelle taille  $P$  choisir ? Certains échantillons sont-ils «meilleurs» pour une même taille  $P$  ? Et si oui, comment obtenir le meilleur échantillon ? Nous allons donc tenter de répondre à ces questions en passant en revue les différentes méthodes de construction de bases réduites.

### 1.2.1 Base naïve

La première approche pour la construction d'une base réduite est de fixer arbitrairement une taille  $P$  et de construire un échantillon en choisissant des valeurs de  $\mu$  aléatoires dans  $\mathcal{D}$ . Nous pouvons d'abord mettre en avant le fait que cette technique fonctionne. Elle a donc l'avantage d'être très facile et très rapide à mettre en place. Cependant, elle ne nous fournit aucune information *a priori* sur l'erreur commise. Pour atteindre un certain niveau d'erreur, il faudra donc augmenter  $P$  autant que nécessaire. Nous n'avons donc ni une taille  $P$  optimale, ni l'assurance que notre échantillon est «bien choisi».

En clair, cette technique n'est pas recommandée dans la pratique, mais elle permet néanmoins de créer des bases réduites. Elle est parfaite pour commencer notre étude des bases réduites.

### 1.2.2 Base orthonormée

Une deuxième approche plus réfléchie consiste à orthonormaliser les éléments de notre base réduite. Comme précédemment nous fixons arbitrairement  $P$  et nous prenons un échantillon aléatoire de cette taille. Cependant cette fois-ci nous n'utilisons pas directement les solutions  $\{u_p\}_{p=1}^P$  obtenues mais une version orthonormée  $\{\phi_p\}_{p=1}^P$  (avec le procédé de Gram-Schmidt par exemple).

De cette façon nous avons  $\text{Vect}(\{u_p\}_{p=1}^P) = \text{Vect}(\{\phi_p\}_{p=1}^P)$ . Ce traitement des solutions permet d'obtenir une erreur légèrement plus faible pour une même taille  $P$ .

Cela a l'avantage d'améliorer le conditionnement de la/les matrice(s) base réduite et donc la stabilité de la méthode. En effet, si deux solutions sont très proches l'une de l'autre, ou combinaison linéaire l'une de l'autre, alors la base réduite générée ne va pas être libre. Cela va alors faire exploser le conditionnement de la matrice base réduite associée, voire rendre celle-ci non-inversible. En orthonormant la base, nous supprimons la partie de l'information redondante, ce qui permet de s'assurer que la base engendrée est bien libre.

Cependant cette technique ne nous fournit toujours pas d'information sur la taille optimale de  $P$  à choisir.

### 1.2.3 Algorithme glouton

Nous proposons finalement une approche *gloutonne* (greedy). L'idée est la suivante : nous partons d'un  $\mu_1$  quelconque puis nous calculons la solution EF associée. Cette solution constitue le premier élément de notre base réduite. Ensuite, pour toutes les valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}_h$ , où  $\mathcal{D}_h$  est une discrétisation de l'espace du paramètre, nous calculons la solution base réduite associée. Pour chacune de ces solutions BR nous calculons une estimation de l'erreur par rapport à la solution EF correspondante. Nous prenons alors comme  $\mu_2$  le  $\mu$  qui maximise l'erreur, c'est-à-dire le  $\mu$  pour lequel la solution EF est la moins bien approchée. Sa solution EF est ensuite calculée puis injectée dans la base réduite. Nous réitérons alors ce procédé tant que l'erreur pour chacune des solution BR est au dessus d'un certain seuil  $\varepsilon$ . L'algorithme exact s'écrit de la façon suivante :

---

**Algorithm 1** Algorithme glouton (greedy)

---

**Require:**  $\varepsilon, \mu_1, n = 1$

- 1: **while**  $\eta > \varepsilon$  **do**
  - 2:   Trouver  $u_\delta(\mu_n) \in V_\delta$  solution de  $a(u_\delta(\mu_n), v_\delta; \mu_n) = f(v_\delta; \mu_n), \forall v_\delta \in V_\delta$
  - 3:    $V_p \leftarrow \text{Vect}(\{u_\delta(\mu_i)\}_{i=1}^n)$
  - 4:   **for**  $\mu \in \mathcal{D}_h$  **do**
  - 5:     Trouver  $u_p(\mu) \in V_p$  solution de  $a(u_p(\mu), v_p; \mu) = f(v_p; \mu), \forall v_p \in V_p$
  - 6:     Calculer  $\eta(\mu) = \|u_\delta(\mu) - u_p(\mu)\|_{V_\delta}$
  - 7:   **end for**
  - 8:    $\mu_{n+1} = \arg \max_{\mu \in \mathcal{D}_h} \eta(\mu)$
  - 9:    $n = n + 1$
  - 10: **end while**
- 

Remarquons que plus la discrétisation  $\mathcal{D}_h$  de  $\mathcal{D}$  va être fine, plus l'algorithme va prendre de temps. Mise à part cette contrainte, celui-ci dispose de plusieurs avantages. En effet, l'échantillon  $S_P = \{\mu_p\}_{p=1}^P$  créé ici est le meilleur possible au sein de la discrétisation. La taille  $P$  de l'échantillon est elle aussi optimale. Nous remarquons finalement qu'il est possible d'ajouter un procédé d'orthonormalisation après ou pendant cet algorithme afin d'améliorer encore d'avantage la base réduite créée.

Finalement, l'approche gloutonne semble être la meilleure façon de créer une base réduite, bien qu'elle soit un peu plus coûteuse en calcul que les autres approches. Remarquons que l'algorithme se prête parfaitement au calcul parallèle, notamment sa boucle «for», ce qui permet de pallier son coût algorithmique.

### 1.2.4 Décomposition aux valeurs propres (POD)

La méthode de décomposition aux valeurs propres est une méthode dite «*explore-and-compress*», car elle consiste à évaluer un grand nombre d'éléments («*explore*»), puis à compresser l'information pour n'en conserver que la partie essentielle («*compress*»). Nous nous plaçons dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$ . Commençons par prendre  $\mathcal{D}_M$  une discrétisation régulière de l'espace des paramètres  $\mathcal{D}$  en  $M$  valeurs, en général nous prenons  $M$  grand. Nous notons alors  $\{w_m\}_{m=1}^M$  la famille des  $M$  solutions associées, telle que  $w_m = u(\mu_m)$ ,  $\forall m \in \llbracket 1, M \rrbracket$ . Nous posons alors la matrice  $\mathbb{A}$  donnée par :

$$(\mathbb{A})_{i,j} = (w_i, w_j)_E, \quad 1 \leq i, j \leq M.$$

Cette matrice est symétrique, elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes réelles. Nous notons  $\{(\xi_m, \lambda_m)\}_{m=1}^M$  les  $M$  couples de vecteur-valeur propre, nous supposons par ailleurs qu'ils sont ordonnés par ordre décroissant des  $\lambda_m$  (i.e.  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M$ ). La base  $M$ -POD est alors la base  $\{\xi_m\}_{m=1}^M$ , elle est telle que :

$$\text{Vect}(\{\xi_m\}_{m=1}^M) = \text{Vect}(\{w_m\}_{m=1}^M) \subset E$$

Il est alors possible de tronquer la base  $M$ -POD en prenant la base générée par les  $N$  premiers vecteurs propres, i.e. la base  $\{\xi_n\}_{n=1}^N$ . Il est alors prouvé [13] que parmi tous les espaces vectoriels finis de dimension  $N$  inclus dans  $E$ , notons-les  $E_N$ , la base  $N$ -POD est celle qui minimise le critère suivant :

$$\eta(E_n) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\mu \in \mathcal{D}_M} \inf_{v \in E_n} \|u(\mu) - v\|_E^2} \quad (1)$$

De plus, pour  $f \in E$ , la projection de  $f$  dans la base  $N$ -POD est donnée par :

$$p_N(f) = \sum_{n=1}^N (f, \xi_n)_E \xi_n$$

Nous avons alors le résultats suivant :  $\forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket$  l'erreur d'estimation vérifie :

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \|w_k - p_N(w_k)\|_E^2} = \sqrt{\sum_{m=N+1}^M \lambda_m} \quad (2)$$

Contrairement à l'algorithme greedy, la méthode POD ne fournit pas la taille optimale pour un seuil  $\varepsilon$  donné. Cependant l'estimation d'erreur (2) fournit un bon outil pour le choix de  $N$ . De plus, avec cette méthode, nous sommes sûr de choisir le meilleur espace fini possible pour une taille  $N$  fixée.

### 1.3 Méthode d'interpolation empirique (EIM)

#### 1.3.1 Principe de la méthode

Nous introduisons maintenant un outil très utile dans le cadre des bases réduites : La Méthode d'Interpolation Empirique (EIM en anglais). Cette méthode permet de découpler les variables d'une fonction en l'approchant par une combinaison linéaire de fonctions du même type. Soient  $g$  une fonction de  $E$ ,  $\mu \in \mathcal{D}$  et  $X \in \Omega$ , nous pouvons l'écrire de la façon suivante :

$$g(X, \mu) \simeq \sum_{n=1}^{N_g} g(X_n, \mu) g(X, \mu_n)$$

Nous avons la famille  $\{g(X_n, \cdot)\}_{n=1}^{N_g}$  de fonctions qui ne dépendent que de  $\mu$  et la famille  $\{g(\cdot, \mu_n)\}_{n=1}^{N_g}$  de celles qui ne dépendent que de  $X$ . Afin d'augmenter la stabilité, nous utilisons une version orthonormée pour les  $\{g(\cdot, \mu_n)\}_{n=1}^{N_g}$ , qui nous donne une famille  $\{g_n\}_{n=1}^{N_g}$ . De plus, nous notons  $\theta_n = g(X_n, \cdot)$ , nous avons alors :

$$g(X, \mu) \simeq \sum_{n=1}^{N_g} \theta_n(\mu) g_n(X)$$

Pour aboutir à ce genre de décomposition, il nous faut chercher les  $\{\mu_n\}_{n=1}^{N_g}$  qui forment les  $\{g_n\}_{n=1}^{N_g}$ , ainsi que les  $\{X_n\}_{n=1}^{N_g}$  qui forment les  $\{\theta_n\}_{n=1}^{N_g}$ .

Avant d'en arriver à l'algorithme, il nous faut introduire l'opérateur d'interpolation. Supposons que nous ayons une famille  $\{g_n\}_{n=1}^N$  de taille  $N$ . La  $M$ -ième interpolée, avec  $M \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , est une fonction qui s'écrit :

$$\mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)] = \sum_{m=1}^M \alpha_m g_m$$

et qui vérifie :

$$\mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)](X_m) = g(X_m, \mu) \quad \forall m \in \llbracket 1, M \rrbracket$$

Nous pouvons facilement voir que pour  $\mu \in \mathcal{D}$  fixé, ce problème est bien posé et que la fonction  $\mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)]$  est unique. En effet, pour trouver les  $\{\alpha_m\}_{m=1}^M$  il suffit de résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)](X_1) \\ \mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)](X_2) \\ \dots \\ \mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)](X_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(X_1, \mu) \\ g(X_2, \mu) \\ \dots \\ g(X_M, \mu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 g_1(X_1) & \alpha_2 g_2(X_1) & \dots & \alpha_M g_M(X_1) \\ \alpha_1 g_1(X_2) & \alpha_2 g_2(X_2) & \dots & \alpha_M g_M(X_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 g_1(X_M) & \alpha_2 g_2(X_M) & \dots & \alpha_M g_M(X_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(X_1, \mu) \\ g(X_2, \mu) \\ \dots \\ g(X_M, \mu) \end{pmatrix}$$

$$H\alpha = G$$

Si tous les  $\{X_m\}_{m=1}^M$  et les  $\{g_m\}_{m=1}^M$  sont bien distincts, la matrice d'interpolation  $H$  est inversible et  $\mathcal{I}_M[g(\cdot, \mu)]$  est unique.

Comme pour la construction d'une base réduite, plusieurs options s'offrent à nous pour le choix des  $\{X_m\}_{m=1}^M$  et  $\{g_m\}_{m=1}^M$ . Il est tout à fait possible de les choisir au hasard, mais il est préférable d'utiliser une approche *gloutonne* (greedy) afin d'optimiser l'efficacité de la méthode. Pour que l'algorithme fonctionne, il nous devons utiliser une discrétisation de l'espace des paramètres, notée  $\mathcal{D}_h$ . Ainsi qu'une discrétisation de l'espace  $\Omega$ , notée  $\Omega_\delta$ . L'algorithme utilisé est le suivant :

---

**Algorithm 2** Algorithme Méthode d'Interpolation Empirique (EIM)

---

**Require:**  $\varepsilon, g, k = 2$

- 1: Trouver  $\mu_1 = \arg \sup_{\mu \in \mathcal{D}_h} \|g(\cdot, \mu)\|_E$
  - 2: Trouver  $X_1 = \arg \sup_{X \in \Omega_\delta} |g_1(X)|_{\mathbb{R}}$
  - 3: Calculer  $g_1 = \frac{g(\cdot, \mu_1)}{g(X_1, \mu_1)}$
  - 4: **while**  $\eta > \varepsilon$  **do**
  - 5:   Trouver  $\mu_k = \arg \sup_{\mu \in \mathcal{D}_h} \|g(\cdot, \mu) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu)]\|_E$
  - 6:   Trouver  $X_k = \arg \sup_{X \in \Omega_\delta} \|g(X, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X)\|_E$
  - 7:   Calculer  $g_k = \frac{g(\cdot, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)]}{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)}$
  - 8:   Calculer  $\eta = \sup_{\mu \in \mathcal{D}_h} \|g(\cdot, \mu) - I_k[g(\cdot, \mu)]\|_E$
  - 9:    $k = k + 1$
  - 10: **end while**
- 

L'algorithme consiste à ajouter les fonctions qui sont le moins bien interpolées par la base actuelle, et ce, tant que l'erreur d'interpolation maximale ne passe pas sous un certain seuil  $\varepsilon$ . L'algorithme va alors retourner le nombre minimal de fonctions à utiliser  $N_g$  pour un seuil  $\varepsilon$  donné, ainsi que les points d'interpolation  $\{X_n\}_{n=1}^{N_g}$  et la base orthonormée  $\{g_n\}_{n=1}^{N_g}$  associée. Nous remarquons premièrement que, par construction, nous avons  $\text{Vect}(\{h_n\}_{n=1}^{N_g}) = \text{Vect}(\{(g(\cdot, \mu_n)\}_{n=1}^{N_g})$ . De plus, pour tout  $m, k \in \llbracket 1, N_g \rrbracket$  :

$$\text{Si } k < m : \quad g_k(X_m) = \frac{g(X_m, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_m)}{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } k = m : \quad g_k(X_m) = \frac{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)}{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k > m : \quad g_k(X_m) &= \frac{g(X_m, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_m)}{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)} \in \mathbb{R} \\ &= \frac{g(X_m, \mu_k) - g(X_m, \mu_k)}{g(X_k, \mu_k) - I_{k-1}[g(\cdot, \mu_k)](X_k)} = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la construction des  $\{g_n\}_{n=1}^{N_g}$  proposée dans l'algorithme précédent, nous avons que la matrice d'interpolation  $H$  est triangulaire inférieure de diagonale unité. En pratique elle est donc facilement inversible.

Nous remarquons que l'algorithme présenté semble applicable pour n'importe quelle fonction  $g$ . En effet, celui-ci ne fait pas intervenir de régularité particulière sur  $g$ , la seule restriction étant que l'ensemble  $E$  doit être un espace vectoriel normé. Cependant, il paraît évident que pour des fonctions présentant de très fortes variations, par rapport au paramètre  $\mu$  ou à la variable d'espace  $X$ , l'algorithme risque de nécessiter une grande base  $\{g_n\}_{n=1}^{N_g}$  pour converger. Or si cette taille  $N_g$  est très grande, la méthode perd alors une grande partie de son intérêt.

Une étude plus poussée de cette méthode pourrait donc être un point important pour son utilisation dans le contexte des bases réduites. Il serait notamment important d'avoir le contrôle de la valeur  $N_g$  par rapport à la régularité de  $g$  et l'espace  $E$  dans lequel elle se trouve.

### 1.3.2 Exemples

Bien que cette méthode présente encore quelques points d'ombre, nous proposons d'en illustrer son fonctionnement à travers trois fonctions qui nous seront utiles dans une partie suivante. Nous prenons  $E = L^2(\Omega)$  et nous posons les fonctions  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  suivantes :

$$h_1(x, y; \mu) = 1 + \mu \sin(2\pi x)$$

$$h_2(x, y; \mu) = 2\pi\mu y \cos(2\pi x)$$

$$h_3(x, y; \mu) = \frac{1 + 4\pi^2\mu^2 \cos^2(2\pi x)y^2}{1 + \mu \sin(2\pi x)}.$$

Nous souhaitons alors obtenir des décompositions comme suit :

$$h_1(x, y; \mu) = \sum_{i_1=1}^{N_{h_1}} \theta_i^{h_1}(\mu) h_{1,i}(x, y) \quad h_2(x, y; \mu) = \sum_{i_2=1}^{N_{h_2}} \theta_i^{h_2}(\mu) h_{2,i}(x, y)$$

$$h_3(x, y; \mu) = \sum_{i_3=1}^{N_{h_3}} \theta_i^{h_3}(\mu) h_{3,i}(x, y).$$

Nous pouvons remarquer que dans les cas de  $h_1$  et  $h_2$ , il existe des décompositions exactes par rapport à  $\mu$ . En effet :

$$h_1(x, y; \mu) = 1 + \mu \sin(2\pi x) = \theta_1^{h_1}(\mu) h_{1,1}(x, y) + \theta_2^{h_1}(\mu) h_{1,2}(x, y),$$

$$\text{avec :} \quad \begin{array}{ll} \theta_1^{h_1}(\mu) = 1 & h_{1,1}(x, y) = 1 \\ \theta_2^{h_1}(\mu) = \mu & h_{1,2}(x, y) = \sin(2\pi x). \end{array}$$

Et de la même façon nous avons

$$h_2(x, y; \mu) = 2\pi\mu y \cos(2\pi x) = \theta^{h_2}(\mu)h_{2,1}(x, y),$$

avec :

$$\theta^{h_2}(\mu) = \mu \quad h_{2,1}(x, y) = 2\pi y \cos(2\pi x).$$

En revanche, il n'existe pas de décomposition exacte par rapport à  $\mu$  pour  $h_3$ .

Ainsi nous allons pouvoir valider la méthode en utilisant  $h_1$  et  $h_2$ , puis tester son efficacité avec  $h_3$ . Comme nous avons pris  $E = L^2(\Omega)$ , nous avons le choix pour la norme à utiliser. Nous effectuons les tests pour la norme  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ , soit la norme usuelle de  $L^2(\Omega)$ , et la norme  $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ .

Après avoir utilisé l'algorithme sur les trois fonctions proposées avec un seuil  $\varepsilon = 10^{-6}$ , nous obtenons les résultats suivants : 2 éléments avant convergence pour  $h_1$ , 1 seul pour  $h_2$  et 16 éléments pour  $h_3$ . L'erreur diffère très légèrement en fonction de la norme, mais le nombre d'éléments est strictement le même dans les deux cas. Nous proposons alors de d'afficher les valeurs de  $\mu_i$  choisies et les erreurs d'interpolations  $\eta_i$  à chaque itération  $i$ , pour  $h_1$  et  $h_2$  :

$h_1$	$\ \cdot\ _{0,\Omega}$	$\ \cdot\ _{\infty,\Omega}$	$h_2$	$\ \cdot\ _{0,\Omega}$	$\ \cdot\ _{\infty,\Omega}$
$\mu_1$	-0.8	-0.8	$\mu_1$	-0.8	-0.8
$\eta_1$	1.07	1.76	$\eta_1$	$2.3 \times 10^{-16}$	$1.5 \times 10^{-15}$
$\mu_2$	0.8	0.8			
$\eta_2$	$2.2 \times 10^{-16}$	$6.6 \times 10^{-16}$			

TABLE 1 – Résultats des décompositions pour  $h_1$  et  $h_2$

Nous constatons que les erreurs  $\eta$  obtenues après respectivement 2 et 1 éléments pour  $h_1$  et  $h_2$  sont bien en dessous du seuil  $\varepsilon = 10^{-6}$ , ce qui signifie que les décompositions obtenues sont quasiment exactes. C'est exactement le comportement que nous attendions pour ces deux fonctions, ainsi cela valide notre algorithme.

Nous passons alors à l'étude de  $h_3$ , comme nous l'avons dit précédemment, il faut 16 éléments à la base pour atteindre le seuil d'erreur escompté. Nous proposons alors de représenter l'erreur en fonction du nombre d'éléments pour observer la vitesse de convergence :

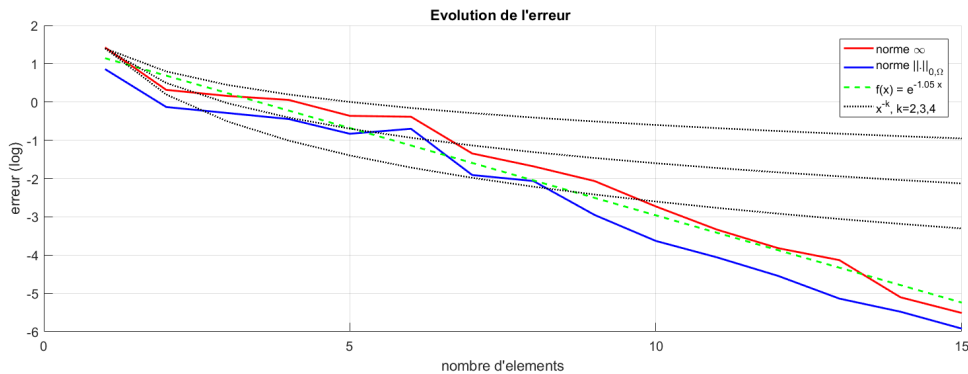


FIGURE 1 – Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'élément

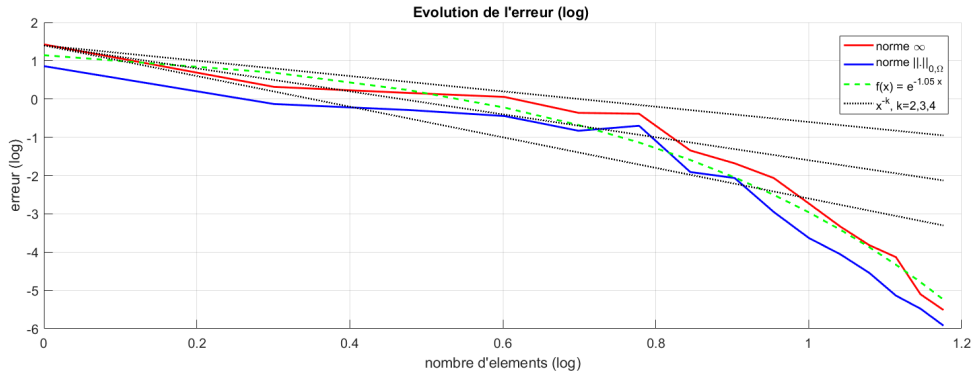


FIGURE 2 – Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'élément (en log-log)

Comme nous pouvons le voir sur les courbes, la convergence de la méthode est exponentielle. Nous avons tracé sur les graphiques la fonction  $f(x) = e^{-1.05x+\tau}$ , avec  $\tau \in \mathbb{R}$  une constante d'ajustement, qui approche assez bien les deux courbes d'erreur.

Nous pouvons affirmer que la méthode d'interpolation empirique est très efficace pour interpoler des fonctions non-linéaires. C'est donc un outil de choix pour nous aider dans notre contexte des bases réduites.



## Deuxième partie

# Équations de la chaleur

## 2 Équations de la chaleur stationnaires

Afin de débiter cette introduction aux bases réduites, nous nous intéressons aux équations de la chaleur (type équation de diffusion). Un exemple concret est proposé par la partie (2.4).

### 2.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons donc aux problèmes de la forme suivante. Soit  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous cherchons  $u(\mu) \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\mu) : \begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla \tilde{u}(\mu)) = f_\mu & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}(\mu) = g_\mu & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ -\kappa_\mu \nabla \tilde{u}(\mu) \cdot \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $\kappa_\mu$  une fonction strictement positive de  $L^2(\Omega)$ ,  $f_\mu$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $g_\mu, h_\mu$  des fonctions de  $L^2(\Gamma)$ , toutes sont dépendantes de  $\mu$ .

Nous commençons par traiter le problème en relevant la condition de Dirichlet afin de la rendre homogène. Nous verrons par la suite que cette étape est nécessaire à la création d'une base réduite. Pour cela, nous cherchons  $Lg \in H^1(\Omega)$  solution du problème :

$$(\mathcal{R}_\mu) : \begin{cases} \Delta Lg(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ Lg(\mu) = g_\mu & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nabla Lg(\mu) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Puis nous posons  $u(\mu) = \tilde{u}(\mu) - Lg(\mu) \Leftrightarrow \tilde{u}(\mu) = u(\mu) + Lg(\mu)$ , nous avons alors :

Sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}(\mu) &= \Delta(u(\mu) + Lg(\mu)) \\ &= \Delta u(\mu) + \Delta Lg(\mu) \\ &= \Delta u(\mu) \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma_{Dir}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mu) &= u(\mu) + Lg(\mu) = g_\mu \\ \Leftrightarrow u(\mu) &= 0 \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma_{Neu}$  :

$$\begin{aligned} \kappa_\mu \frac{\partial \tilde{u}(\mu)}{\partial \vec{n}} &= \kappa_\mu \frac{\partial(u(\mu) + Lg(\mu))}{\partial \vec{n}} \\ &= \kappa_\mu \frac{\partial u(\mu)}{\partial \vec{n}} + \kappa_\mu \frac{\partial Lg(\mu)}{\partial \vec{n}} \\ &= \kappa_\mu \frac{\partial u(\mu)}{\partial \vec{n}} \end{aligned}$$

Il nous reste alors à chercher  $u(\mu) \in H^1(\Omega)$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u(\mu)) = f_\mu & \text{dans } \Omega \\ u(\mu) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ -\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $\kappa_\mu$  strictement positive dans  $L^2(\Omega)$ ,  $h_\mu \in L^2(\Gamma)$  et  $f_\mu \in L^2(\Omega)$ .

Nous posons maintenant  $V := \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_{Dir}} = 0\}$  et nous nous intéressons à la formulation variationnelle du problème, pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u(\mu))v &= f_\mu v \\ -\int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u(\mu))v \, dX &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX \\ \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX + \int_{\Gamma} (\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n})v \, dS &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX \\ \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX - \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX \\ \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS \end{aligned}$$

$$\boxed{a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu)} \quad (3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) &= \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ f(v; \mu) &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS \end{aligned}$$

Notre problème s'écrit à présent sous forme variationnelle comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u(\mu) \in V \text{ tel que :} \\ a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Montrons que ce problème admet une unique solution  $u(\mu) \in V$ . Pour cela nous rappelons le théorème de Lax-Milgram.

### Théorème 1.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel complet. Si nous avons :

- $a$  une forme bilinéaire continue et coercitive sur  $E \times E$
- $l$  une forme linéaire continue sur  $E$

Alors il existe un unique  $u \in E$  tel que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in E$$

et il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|u\|_E \leq C \|f\|, \quad \forall f \in E'$$

Nous choisissons d'utiliser l'espace vectoriel  $V$  défini précédemment et nous le munissons de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ . Or  $V$  est l'image réciproque de  $\{0\}$ , fermé de  $\mathbb{R}$ , par l'application  $v \in H^1(\Omega) \rightarrow v|_{\Gamma_{Dir}}$ , il est donc lui même fermé de  $H^1(\Omega)$ . Comme de plus  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$  est complet, nous avons que  $(V, \|\cdot\|_{1,\Omega})$  est lui aussi complet. Nous avons ensuite que  $a$  est une forme bilinéaire de  $V \times V$ , de plus  $\forall u, v \in V$  :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \kappa_{\mu} \nabla u \cdot \nabla v \, dX \right| \\ &= \|\kappa_{\mu}\|_{0,\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \, dX \\ &\leq \|\kappa_{\mu}\|_{0,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq \|\kappa_{\mu}\|_{0,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

$a$  est donc continue en 0, or par linéarité nous avons que  $a$  est continue sur tout  $V \times V$ . Puis pour  $v \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \kappa_{\mu} \nabla v \cdot \nabla v \, dX \\ &\geq (\inf_{x \in \Omega} \text{ess } \kappa_{\mu}(x)) \|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Si  $\Gamma_{Dir} \neq \emptyset$ , nous pouvons utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, et comme  $\kappa_{\mu}$  est strictement positive, nous obtenons :

$$a(v, v) \geq (\inf_{x \in \Omega} \text{ess } \kappa_{\mu}(x)) \|v\|_{1,\Omega}^2 > 0$$

Ainsi  $a$  est coercitive sur  $V \times V$ . Ensuite, nous avons que  $f$  est une forme linéaire sur  $V$ . Nous introduisons l'espace  $H^{1/2}(\Gamma) := \{\gamma v, \forall v \in H^1(\Omega)\}$ , où  $\gamma$  est l'opérateur de trace. Sur cet espace, nous avons que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  :

$$\|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|v\|_{1,\Omega}$$

D'où, pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} |f(v; \mu)| &= \left| \int_{\Omega} f_{\mu} v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_{\mu} v \, dS \right| \\ &\leq \|f_{\mu}\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|h_{\mu}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|f_{\mu}\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \|h_{\mu}\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq (\|f_{\mu}\|_{0,\Omega} + \|h_{\mu}\|_{L^2(\Gamma)}) \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

$f$  est continue en 0 et par linéarité, elle est continue sur tout  $V$ .

Nous avons alors que si  $\Gamma_{Dir} \neq \emptyset$ , nous pouvons utiliser le théorème de Lax-Milgram et donc que notre problème variationnel admet une unique solution.

Montrons finalement que si  $u$  est solution du problème variationnel, alors  $u$  est solution de  $(\mathcal{P}_\mu)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$  et  $u \in V$  l'unique solution du problème variationnel :

$$\begin{aligned}
a(u, \varphi) - f(\varphi) &= 0 \\
\int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u \cdot \nabla \varphi - f \varphi \, dX &= 0 \\
- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) \varphi + f \varphi \, dX &= 0 \\
\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) + f) \varphi \, dX &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \text{ par densité} \\
\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) + f) v \, dX &= 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega) \\
(\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) + f) \in L^2(\Omega)^\perp &\Rightarrow -\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) = f \quad \text{p.p. sur } \Omega
\end{aligned}$$

Soit  $v \in V$  et  $u$  l'unique solution du problème variationnel :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - f v \, dX - \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS &= 0 \\
- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) v + f v \, dX - \int_{\Gamma_{Neu}} \kappa_\mu v \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} \, dS - \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS &= 0 \\
- \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) + f) v \, dX - \int_{\Gamma_{Neu}} (\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} + h_\mu) v \, dS &= 0
\end{aligned}$$

Or nous venons de montrer que  $\nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u) + f = 0$  presque partout sur  $\Omega$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{Neu}} (\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} + h_\mu) v \, dS &= 0 \quad \forall v \in V \\
(\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} + h_\mu) \in L^2(\Gamma_{Neu})^\perp &\Rightarrow -\kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} = h_\mu \quad \text{p.p. sur } \Gamma_{Neu}
\end{aligned}$$

Finalement, comme  $u \in V$ , nous avons :  $u = 0$  sur  $\Gamma_{Dir}$ , et donc nous avons bien que  $u$  est l'unique solution de  $(\mathcal{P})$ .

## 2.2 Discrétisation et résolution EF

Soit à présent  $\mathcal{T}_\delta$  une triangulation du domaine de pas  $\delta$  et la famille  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  des fonctions de forme associées. Nous posons alors :

$$V_\delta := \text{Vect}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^N\right) \subset V$$

Pour  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous cherchons  $u_\delta(\mu) \in V_\delta$  solution de :

$$a(u_\delta(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_\delta$$

Comme  $u_\delta(\mu) \in V_\delta$  et que  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  en est une base, il existe un vecteur  $(U_\delta(\mu))_{i=1}^N$  tel que :

$$u_\delta(\mu) = \sum_{i=1}^N U_\delta^i(\mu) \varphi_i \quad U_\delta(\mu) \in \mathbb{R}^N$$

en prenant  $v = \varphi_j$ ,  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^N U_\delta^i(\mu) \varphi_i, \varphi_j; \mu\right) &= f(\varphi_j; \mu) \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \sum_{i=1}^N U_\delta^i(\mu) a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) &= f(\varphi_j; \mu) \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{aligned}$$

$$\boxed{A_\delta^\mu U_\delta(\mu) = F_\delta^\mu} \quad (4)$$

Avec la matrice  $A_\delta^\mu$  et le vecteur  $F_\delta^\mu$  donnés par :

$$\begin{aligned} (A_\delta^\mu)_{i,j} &= a(\varphi_i, \varphi_j, \mu) \quad 1 \leq i, j \leq N \\ (F_\delta^\mu)_i &= f(\varphi_i, \mu) \quad 1 \leq i, j \leq N \end{aligned}$$

En résolvant ce système pour une valeur de  $\mu$  donnée, nous obtenons une approximation EF de  $u(\mu)$ , que nous notons  $u_\delta(\mu)$ . Á laquelle il ne faut pas oublier d'ajouter  $Lg$  la condition de relèvement.

Remarquons à ce stade que pour obtenir une solution EF il est nécessaire de résoudre un système de dimension  $N$ . Ce  $N$  peut-être très grand si le maillage  $\mathcal{T}_\delta$  utilisé est très fin. Ici la précision de l'approximation dépend donc de  $N$ . Or dans le contexte des bases réduites, nous souhaitons obtenir des approximations de précision équivalente, indépendamment de  $N$ .

### 2.3 Problème en base réduite

Supposons à présent que  $\kappa_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_\mu$  et  $h_\mu$  dépendent affinement de  $\mu$ . C'est-à-dire qu'il est possible de les décomposer de la façon suivante :

$$\kappa_\mu = \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \kappa_k \quad f_\mu = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k \quad g_\mu = \sum_{k=1}^{N_g} \theta_k^g(\mu) g_k \quad h_\mu = \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k$$

Nous commençons par décomposer la fonction de relèvement, pour tout  $k \in \llbracket 1, N_g \rrbracket$  nous cherchons  $Lg^k$  telle que :

$$(\mathcal{R}^k) : \begin{cases} \Delta Lg^k = 0 & \text{dans } \Omega \\ Lg^k = g_k & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nabla Lg^k \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Puis nous avons finalement que  $u(\mu) = \tilde{u}(\mu) - Lg(\mu) = \tilde{u}(\mu) - \sum_{k=1}^{N_g} \theta_k^g(\mu) Lg^k$ . Nous verrons dans ce qui suit qu'il existe une manière plus simple de traiter le relèvement des conditions de Dirichlet non-homogènes.

Nous utilisons ensuite les décompositions pour ré-écrire nos formes bilinéaire et linéaire :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \kappa_k \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \int_{\Omega} \kappa_k \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k(u, v) \end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned} f(v; \mu) &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k v \, dS \\ &= \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) \int_{\Omega} f_k v \, dX + \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) \int_{\Gamma_{Neu}} h_k v \, dS \\ &= \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v) \quad [\text{avec ré-indicesage}] \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k(u, v) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v)} \quad (5)$$

En utilisant ces décompositions, nous obtenons une formulation variationnelle équivalente avec des formes bilinéaires et linéaires qui ne dépendent plus de  $\mu$ . Nous en verrons l'intérêt par la suite.

Nous posons maintenant  $S = \{\mu_p\}_{p=1}^P$  un échantillon de  $P$  valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$  toutes distinctes et  $\{w_p\}_{p=1}^P$  la famille de solutions associées, avec  $w_p := u_\delta(\mu_p)$ . Pour chaque  $\mu_p$ , nous avons que  $w_p \in V_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p := \text{Vect}(\{w_p\}_{p=1}^P) \subset V_\delta \subset V$$

En supposant que  $V_p$  réalise une bonne approximation de  $V_\delta$  et en supposant que  $V_\delta$  soit lui-même une bonne approximation de  $V$  alors le problème (3) devient :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_p(\mu) \in V_p \text{ tel que :} \\ a(u_p(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_p \end{cases}$$

Ou de façon équivalente :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_p(\mu) \in V_p \text{ tel que :} \\ \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k(u_p(\mu), v) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v) \quad \forall v \in V_p \end{cases}$$

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $u_p(\mu) \in V_p$ , il existe un vecteur  $U_p(\mu)$  tel que :

$$u_p(\mu) = \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) w_i \quad U_p(\mu) \in \mathbb{R}^P$$

en prenant  $v = w_j$ ,  $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$ , la première version de la formulation variationnelle nous donne :

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) w_i, w_j; \mu\right) &= f(w_j; \mu) \quad \forall j \in \llbracket 1, P \rrbracket \\ \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) a(w_i, w_j; \mu) &= f(w_j; \mu) \quad \forall j \in \llbracket 1, P \rrbracket \end{aligned}$$

$$\boxed{A_p^\mu U_p(\mu) = F_p^\mu} \quad (6)$$

Avec la matrice  $A_p^\mu$  et le vecteur  $F_p^\mu$  donnés par :

$$\begin{aligned} (A_p^\mu)_{i,j} &= a(w_i, w_j, \mu) \quad 1 \leq i, j \leq P \\ (F_p^\mu)_i &= f(w_i, \mu) \quad 1 \leq i, j \leq P \end{aligned}$$

En résolvant ce système (de taille  $P$ ) pour des valeurs de  $\mu$  données, nous obtenons des solutions BR que nous notons  $u_p(\mu)$ , auxquelles il ne faut pas oublier d'ajouter les fonctions  $Lg^k$  de relèvement. Cependant, si la valeur de  $\mu$  change, la matrice  $A_p^\mu$  et le vecteur  $F_p^\mu$  changent eux aussi.

Nous utilisons cette fois la seconde forme de la formulation variationnelle, toujours en prenant  $v = w_j$ ,  $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k \left( \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) w_i, w_j \right) &= \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(w_j) \quad \forall j \in \llbracket 1, P \rrbracket \\ \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k(w_i, w_j) &= \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(w_j) \quad \forall j \in \llbracket 1, P \rrbracket \end{aligned}$$

$$\boxed{\left( \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) A_p^k \right) U_p(\mu) = \left( \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) F_p^k \right)} \quad (7)$$

Nous obtenons toujours un système linéaire de taille  $P$ . Cependant ici, chacune des matrices  $\{A_p^k\}_{k=1}^{N_\kappa}$  et chacun des vecteurs  $\{F_p^k\}_{k=1}^{N_{fh}}$  est indépendant de  $\mu$ . Changer la valeur de ce dernier ne les affecte pas, seul leur assemblage est modifié.

Nous voyons tout de suite l'intérêt de la décomposition affine par rapport à  $\mu$ . Car une fois les matrices  $\{A_p^k\}_{k=1}^{N_\kappa}$  et vecteurs  $\{F_p^k\}_{k=1}^{N_{fh}}$  pré-calculés (pendant la construction de la base par exemple), il est beaucoup plus économique de les assembler en fonction de  $\mu$ , puis de résoudre le système obtenu, plutôt que de recalculer toute la matrice  $A_p$  et vecteur  $F_p$  de la forme (6).

Dans le cas EF classique, nous avons donc un système de taille  $N$  à résoudre, où  $N$  est le nombre de degrés de liberté et est souvent grand. Cette résolution coûte en générale  $\mathcal{O}(N^3)$  calculs. Ici, la dimension  $P$  du système à résoudre est indépendante de  $N$ . En supposant que les matrices  $\{A_p^k\}_{k=1}^{N_\kappa}$  et les vecteurs  $\{F_p^k\}_{k=1}^{N_{fh}}$  soient pré-calculés, l'assemblage du système coûte  $2N_\kappa \times P^2$  calculs pour les matrices et  $2N_{fh} \times P$  pour les vecteurs. Si nous ajoutons la résolution, nous avons un coût algorithmique de  $P^3 + 2N_\kappa \times P^2 + 2N_{fh} \times P$ . Finalement, l'assemblage de la solution en base réduite coûte  $P \times N$  calculs. En conclusion, calculer une solution éléments finis revient à  $\mathcal{O}(N^3)$  et pour une solution base réduite cela revient à  $\mathcal{O}(N \times P + P^3)$  calculs. Ainsi, si  $P$  est très faible devant  $N$ , l'utilisation d'une base réduite peut s'avérer très économique en calculs et *de facto* en temps.

Nous avons vu de façon assez générale comment déployer une méthode de base réduite sur une équation de type chaleur. Remarquons qu'un point important n'a pour l'instant pas été abordé. En effet, nous avons utilisé un échantillon  $S$  de valeurs de  $\mu$  sans parler de sa construction. Pour ce faire, nous pouvons utiliser au choix les méthodes présentées précédemment. Choisir le bon échantillon est un point fondamental pour la méthode base réduite, tant pour sa stabilité que pour son efficacité.

Finalement, nous pouvons voir à ce stade pourquoi il est obligatoire de relever la condition de Dirichlet non-homogène. Car dans un système EF classique, il est possible de fixer directement les valeurs des degrés de liberté concernés, ici nous combinons les fonctions, nous ne pouvons donc pas jouer sur les valeurs de ces degrés de liberté. La seule possibilité est ainsi de relever ces conditions de bord pour les rendre homogènes. De cette façon toutes les combinaisons de fonctions de base réduite sur le bord concerné resteront homogènes.



## 2.4 Exemple

Dans ce premier exemple, nous nous intéressons à une équation de la chaleur stationnaire en 2D. Nous posons  $\Omega = ]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ , ce domaine  $\Omega$  se décompose en 2 sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de la façon suivante :

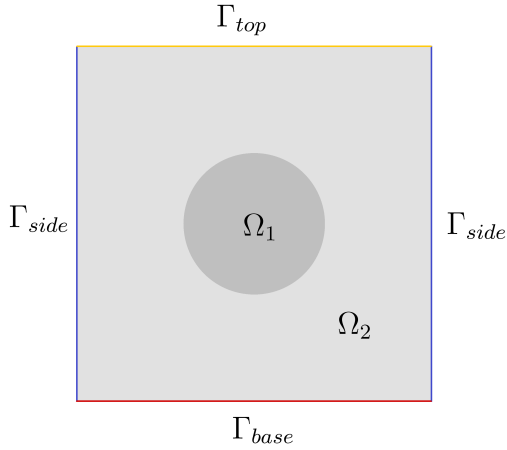


FIGURE 3 – Domaine utilisé

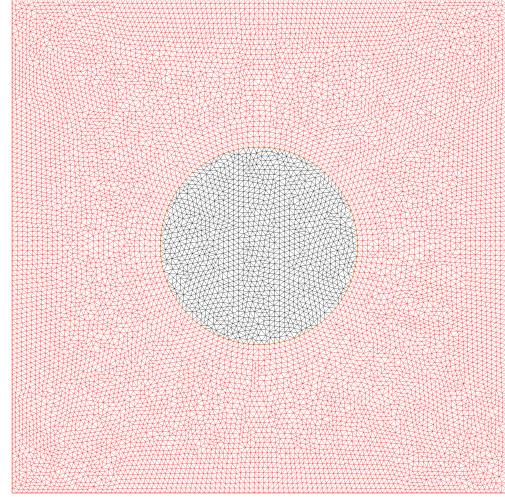


FIGURE 4 – Maillage associé  
(21312 éléments)

Sur ce domaine, nous posons le problème suivant ( $\mathcal{P}_\mu$ ) suivant :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} \nabla \cdot (\kappa_\mu \nabla u(\mu)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(\mu) = 0 & \text{sur } \Gamma_{top} \\ \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} = \mu_2 & \text{sur } \Gamma_{base} \\ \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{side} \end{cases}$$

Avec la fonction de conductivité  $\kappa_\mu$  telle que :

$$\kappa_\mu(x) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 1 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Dans notre problème, nous avons donc deux paramètres, nous notons :

$$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D} := ]0, 10[ \times ]-1, 1[$$

Physiquement, notre problème correspond à l'étude de la diffusion de la chaleur dans un domaine carré, au sein duquel se trouve un disque de conductivité  $\mu_1$ . Le domaine est isolé sur les cotés (condition de Neumann homogène), reçoit un flux  $\mu_2$  par le bas (condition de Neumann non-homogène) et nous imposons une température à 0 au sommet (Dirichlet homogène).

Nous posons alors  $V := \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_{top}} = 0\}$  et nous remarquons que :

$$g_\mu \equiv 0 \quad h_\mu \equiv 0 \quad f_\mu = \theta^f(\mu) f \quad \kappa_\mu = \theta_1^\kappa(\mu) \kappa_1 + \theta_2^\kappa(\mu) \kappa_2$$

avec :

$$\begin{aligned}
\theta^f(\mu) &= \mu_2 & f &= 1 \\
\theta_1^\kappa(\mu) &= \mu_1 & \kappa_1 &= \mathbb{1}_{\Omega_1} \\
\theta_2^\kappa(\mu) &= 1 & \kappa_2 &= \mathbb{1}_{\Omega_2}
\end{aligned}$$

Nous utilisons ces décompositions dans les formes bilinéaire et linéaire :

$$\begin{aligned}
a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\
&= \int_{\Omega_1} \theta_1^\kappa(\mu) \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX + \int_{\Omega_2} \theta_2^\kappa(\mu) \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\
&= \theta_1^\kappa(\mu) a_1(u, v) + \theta_2^\kappa(\mu) a_2(u, v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v; \mu) &= \int_{\Gamma_{base}} \theta^f(\mu) v \, dS \\
&= \theta^f(\mu) f(v)
\end{aligned}$$

De cette façon, nous obtenons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u(\mu) \in V \text{ tel que :} \\ \sum_{k=1}^2 \theta_k^\kappa(\mu) a_k(u(\mu), v) = \theta^f(\mu) f(v) \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

Comme nous venons de le détailler dans les parties (2.2) et (2.3), nous pouvons résoudre ce problème en EF ou en BR. Cependant, pour obtenir une solution BR nous devons d'abord choisir un échantillon  $S$  de  $P$  valeurs de  $\mu$ .

Avec ce premier exemple, nous allons comparer l'efficacité de plusieurs bases réduites. La première sera construite à partir d'un échantillon  $S$  de valeurs de  $\mu$  aléatoires, la seconde sera une version orthonormée de la première. Puis une dernière base sera construite à partir d'un échantillon  $S$  choisi par l'algorithme glouton.

Pour comparer les différentes bases, nous les construisons de taille  $P$  allant de 1 à 10, suivant chaque méthode. Ensuite, nous calculons l'erreur maximale entre les solutions BR pour chaque  $\mu \in \mathcal{D}_h$  et leur solution EF correspondante.

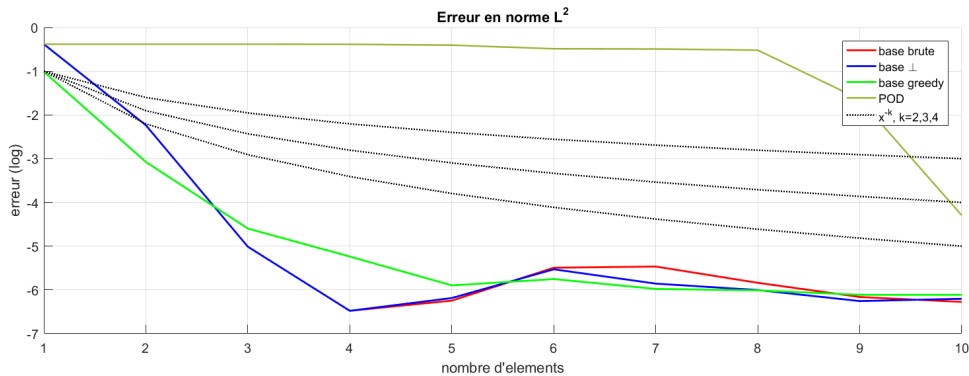
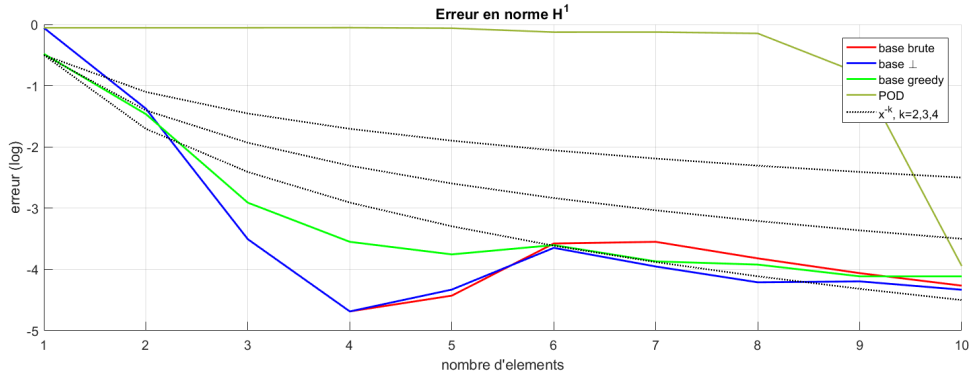
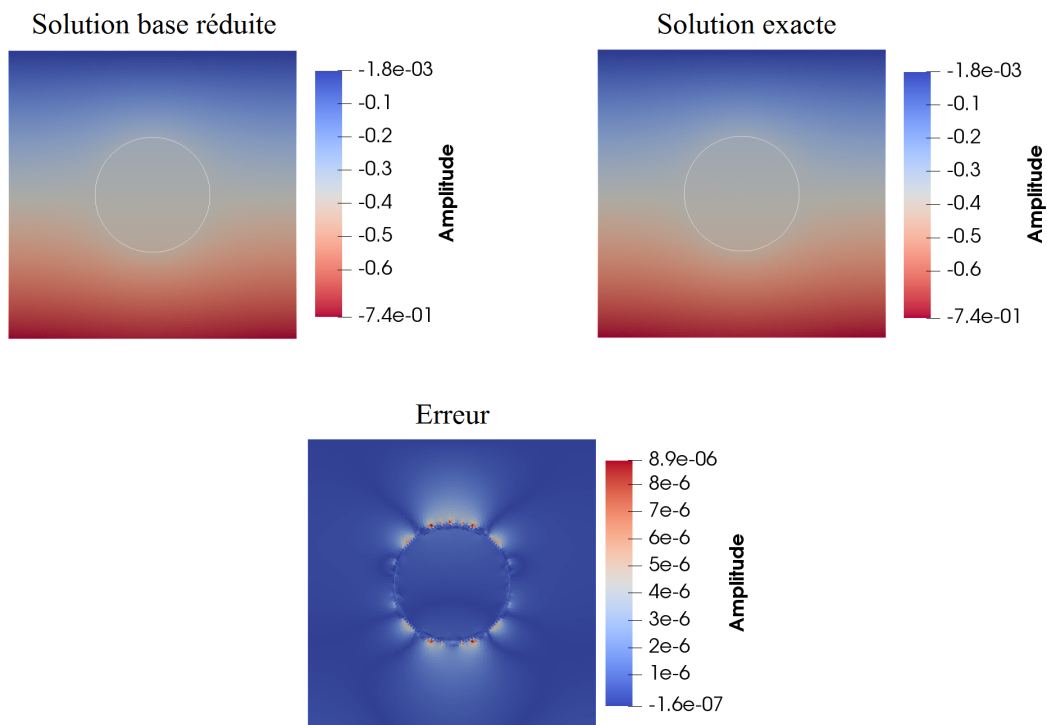


FIGURE 5 – Erreur en norme  $L^2$

FIGURE 6 – Erreur en norme  $H^1$ 

Nous pouvons voir que quelle que soit la méthode utilisée, l'erreur ( $L^2$ ) converge très rapidement vers  $10^{-6}$  puis stagne. En effet, la solution BR est une combinaison de solutions EF, l'erreur est donc conditionnée par l'erreur EF. Nous remarquons que seul 5 éléments sont nécessaires pour obtenir une solution BR équivalente à la solution EF.

De plus, nous avons tracé les monômes  $x^{-k}$  pour  $k = 2, 3$  et  $4$ , ceci nous permet d'observer la convergence exponentielle en base réduite. Notons que cette convergence est exponentielle, quelque soit la méthode d'échantillonnage. Enfin, nous pouvons voir ici qu'une base aléatoire semble plus efficace qu'une base issue d'un algorithme glouton, cela est dû à la simplicité de l'exemple. Nous mettrons en évidence la supériorité de l'algorithme dans l'exemple suivant.

FIGURE 7 – Affichage d'une solution EF, BR et de leur différence, pour  $\mu = (5.4, -0.87)$

### 3 Équation de la chaleur instationnaires

#### 3.1 Présentation du problème

Nous souhaitons nous intéresser aux cas des bases réduites pour les équations instationnaires. Pour cela, nous commençons par étudier les équations de la chaleur instationnaires. Nous posons le problème suivant :

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous cherchons  $\tilde{u}(t, X; \mu) \in \mathcal{C}^1([0, T], H^1(\Omega))$  telle que :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\mu) : \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(t, X; \mu)}{\partial t} - \kappa_\mu \Delta \tilde{u}(t, X; \mu) = f(t, X; \mu) & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}(t, X; \mu) = g(t, X) & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ -\kappa_\mu \nabla \tilde{u}(t, X; \mu) \cdot \vec{n} = h(t, X; \mu) & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \tilde{u}(0, X; \mu) = \tilde{u}_0(X; \mu) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Avec  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$ ,  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], H^{1/2}(\Omega))$  et  $h$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Gamma))$ , toutes dépendantes de  $\mu$ . Soit  $\mu_0 \in \mathcal{D}$  une valeur quelconque de  $\mu$ . Nous posons  $\varphi_0 = \kappa_{\mu_0} \tilde{u}(\mu_0)$  la solution associée. Nous posons ensuite  $u = \tilde{u} - \varphi_0$ , ce qui nous donne :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} \frac{\partial (u(\mu) + \varphi_0)(t, X)}{\partial t} - \kappa_\mu \Delta (u(\mu) + \varphi_0)(t, X) = f(t, X; \mu) & \text{dans } \Omega \\ u(t, X; \mu) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ -\kappa_\mu \nabla (u(\mu) + \varphi_0)(t, X) \cdot \vec{n} = h(t, X; \mu) & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \kappa_\mu (u(\mu) + \varphi_0)(0, X) = \tilde{u}_0(X; \mu) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Nous obtenons de cette façon une condition de Dirichlet homogène sur le bord  $\Gamma_{Dir}$ . Nous posons alors  $V := \mathcal{C}^1([0, T], \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_{Dir}} = 0\})$  et nous nous intéressons à la formulation variationnelle du problème, pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (u(\mu) + \varphi_0)}{\partial t} v - \kappa_\mu \Delta (u(\mu) + \varphi_0) v = f_\mu v \, dX \\ \int_\Omega \frac{\partial (u(\mu) + \varphi_0)}{\partial t} v - \kappa_\mu \Delta (u(\mu) + \varphi_0) v \, dX &= \int_\Omega f_\mu v \, dX \\ \int_\Omega \frac{\partial u(\mu)}{\partial t} v + \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX &= \int_\Omega f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS \\ & - \int_\Omega \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} v + \kappa_\mu \nabla \varphi_0 \cdot \nabla v \, dX \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} m(u, v; \mu) + a(u, v; \mu) = f(v; \mu)} \quad (8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} m(u, v) &= \int_\Omega uv \, dX \\ a(u, v; \mu) &= \int_\Omega \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ f(v; \mu) &= \int_\Omega f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS - \frac{\partial}{\partial t} m(\varphi_0, v; \mu) - a(\varphi_0, v; \mu) \end{aligned}$$

Pour montrer que cette formulation variationnelle mixte admet une unique solution nous utilisons le théorème de Lions [19].

**Théorème 2.** (*J.L. Lions*)

Soit  $(H, |\cdot|)$  un espace de Hilbert tel que  $H \equiv H'$ . Soit  $(V, \|\cdot\|)$  un autre espace de Hilbert. Nous supposons que  $V \subset H$  avec injection continue et dense, de sorte que :  $V \subset H \subset V'$ . Soit  $T > 0$  fixé, pour presque tout  $t \in [0, T]$  nous nous donnons une forme bilinéaire  $a(t; u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés :

(i) la fonction  $t \rightarrow a(t; u, v)$  est mesurable  $\forall u, v \in V$ ,

(ii)  $|a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall u, v \in V$ ,

(iii)  $a(t; u, v) \geq \alpha \|v\|^2 - C|v|^2$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall v \in V$ ,

où  $\alpha$ ,  $M$  et  $C$  sont des constantes.

Soit le problème :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle & \text{p.p. } t \in [0, T], \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (9)$$

avec  $f \in L^2([0, T]; V')$  et  $u_0 \in V$ .

Alors le problème  $(\mathcal{P})$  admet une unique solution  $u \in L^2([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; V)$  telle que  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; V')$ .

Dans notre cas nous prenons  $H = L^2(\Omega)$  et  $V = H_0^1(\Omega, \Gamma_{Dir})$  muni chacun de leur norme usuelle, ainsi toutes les hypothèses sur les espaces sont vérifiées.

Nous posons alors la fonction  $t \rightarrow a(u, v; \mu)$ , où  $a$  est la forme bilinéaire du problème variationnel (8), cette fonction est trivialement continue, et par conséquent mesurable pour tout  $t \in [0, T]$ . Dans la partie (2.1), nous avons montré que  $a$  était continue sur  $V$ . Il nous reste à montrer que  $a$  vérifie (iii), soit  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} a(v, v; \mu) &= \int_{\Omega} \kappa_{\mu} \nabla u \cdot \nabla v \, dX \\ &\geq \left( \inf_{x \in \Omega} \text{ess } \kappa_{\mu}(x) \right) \|v\|_{1, \Omega}^2 \\ &\geq C(\|v\|_{1, \Omega}^2 + \|v\|_{0, \Omega}^2 - \|v\|_{0, \Omega}^2) \\ &\geq C\|v\|_{1, \Omega}^2 - C\|v\|_{0, \Omega}^2 \end{aligned}$$

Nous avons bien que  $a$  vérifie (iii), nous pouvons donc utiliser le théorème de Lions pour affirmer que notre problème variationnel (8) admet une unique solution  $u$ . Comme dans le cas stationnaire, il est évidemment possible de montrer que cette solution est aussi l'unique solution du problème  $(\mathcal{P}_{\mu})$ , si  $\Gamma_{dir} \neq \emptyset$ .

### 3.2 Discrétisation et résolution EF

Nous discrétisons tout d'abord l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $K$  sous-intervalles. Nous notons :

$$\delta t = \frac{T}{K} \quad k\delta t = t^k$$

Nous utilisons alors la notation suivante :

$$u(t^k, X) = u^k(X)$$

En utilisant cette discrétisation en temps, nous pouvons approcher l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  en utilisant le schéma d'Euler, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \simeq \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta t} \quad (10)$$

Soit à présent  $\mathcal{T}_\delta$  une triangulation du domaine et la familles  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  des fonctions de formes associées. Nous posons alors :

$$V_\delta := \text{Vect}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^N\right) \Rightarrow \mathcal{C}^1([0, T], V_\delta) \subset V$$

Pour  $\mu \in \mathcal{D}$  et pour  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , nous cherchons alors  $u_\delta^k(\mu) \in V_\delta$  solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t} m(u_\delta^k(\mu), v; \mu) + a(u_\delta^k(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_\delta$$

En utilisant l'opérateur discret de dérivée en temps, nous obtenons :

$$\frac{m(u_\delta^k(\mu), v; \mu) - m(u_\delta^{k-1}(\mu), v; \mu)}{\delta t} + a(u_\delta^k(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_\delta$$

Avec :

$$f(v; \mu) = \int_{\Omega} f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}} h_\mu v \, dS - \frac{m(\varphi_0^k, v; \mu) - m(\varphi_0^{k-1}, v; \mu)}{\delta t} - a(\varphi_0^k, v; \mu)$$

Comme  $u_\delta^k(\mu) \in V_\delta$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et que  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  en est une base, il existe un vecteur  $U_\delta^k(\mu)$  tel que :

$$u_\delta^k(\mu) = \sum_{i=1}^N U_\delta^{(i,k)}(\mu) \varphi_i \quad U_\delta^k(\mu) \in \mathbb{R}^N$$

en prenant  $v = \varphi_j$ ,  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} m\left(\sum_{i=1}^N U_\delta^{(i,k)}(\mu) - U_\delta^{(i,k-1)}(\mu) \varphi_i, \varphi_j; \mu\right) + \frac{1}{\delta t} a\left(\sum_{i=0}^N U_\delta^{(i,k)}(\mu) \varphi_i, \varphi_j; \mu\right) &= \frac{1}{\delta t} f(\varphi_j; \mu) \\ \sum_{i=1}^N U_\delta^{(i,k)}(\mu) - U_\delta^{(i,k-1)}(\mu) m(\varphi_i, \varphi_j; \mu) + \frac{1}{\delta t} \sum_{i=0}^N U_\delta^{(i,k)}(\mu) a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) &= \frac{1}{\delta t} f(\varphi_j; \mu) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\delta t} M_\delta^\mu \left( U_\delta^k(\mu) - U_\delta^{k-1}(\mu) \right) + A_\delta^\mu U_\delta^k(\mu) = F^\mu} \quad (11)$$

En résolvant ce système pour une valeur de  $\mu$  donnée, pour  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , nous obtenons une approximation EF de  $u^k(\mu)$ , que nous notons  $u_\delta^k(\mu)$ .

### 3.3 Problème en base réduite

Supposons que  $\kappa_\mu$ ,  $f_\mu$  et  $h_\mu$  dépendent affinement de  $\mu$ . C'est-à-dire qu'il est possible de les décomposer de la façon suivante :

$$\kappa_\mu = \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \kappa_k \quad f_\mu = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k \quad h_\mu = \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k$$

Nous utilisons alors ces décompositions pour ré-écrire nos formes bilinéaire et linéaire :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega} \kappa_\mu \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \kappa_k \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) \int_{\Omega} \kappa_k \nabla u(\mu) \cdot \nabla v \, dX \\ &= \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) a_k(u, v) \end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned} f(v; \mu) &= \int_{\Omega} f_\mu v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu v \, dS - \frac{1}{\delta t} m(\varphi_0^k - \varphi_0^{k-1}, v; \mu) - a(\varphi_0^k, v; \mu) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k v \, dS - c(\varphi_0^k, \varphi_0^{k-1}, v) \\ &= \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) \int_{\Omega} f_k v \, dX + \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) \int_{\Gamma_{Neu}} h_k v \, dS - c(\varphi_0^k, \varphi_0^{k-1}, v) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{fh+1}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v) \quad [\text{avec ré-indicesage}] \end{aligned}$$

Nous conservons la même discrétisation en temps  $[0, T]$  en  $K$  sous-intervalles. Nous notons :

$$\delta t = \frac{T}{K} \quad k \delta t = t^k$$

Nous utilisons alors la notation suivante :

$$u(t^k, X) = u^k(X)$$

Avec cette discrétisation nous avons la même approximation de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  que précédemment (10).

Nous posons maintenant  $S = \{\mu_p, k_p\}_{p=1}^P$  un échantillon de  $P$  couples tous distincts de valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$  et de valeurs de  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ . Nous notons  $\{w_p\}_{p=1}^P$  la famille des  $P$  solutions associées, avec  $w_p := u_\delta^p(\mu_p)$ ,  $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$ . Pour chaque  $\mu_p$  et  $k_p$ , nous avons que  $w_p \in V_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p := \text{Vect}(\{w_p\}_{p=1}^P) \subset V_\delta$$

Pour  $\mu \in \mathcal{D}$ , n'appartenant pas à  $S$  nous cherchons alors  $u_p^k(\mu) \in V_p$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t} m(u_p^k(\mu), v; \mu) + a(u_p^k(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_p$$

En utilisant l'opérateur discret de dérivée en temps, nous obtenons :

$$\frac{m(u_p^k(\mu), v; \mu) - m(u_p^{k-1}(\mu), v; \mu)}{\delta t} + a(u_p^k(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in V_p$$

Avec :

$$f(v; \mu) = \int_{\Omega} f_{\mu} v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_{\mu} v \, dS - \frac{m(\varphi_0^k, v; \mu) - m(\varphi_0^{k-1}, v; \mu)}{\delta t} - a(\varphi_0^k, v; \mu)$$

Comme  $u_p^k(\mu) \in V_p$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et que  $\{w_p\}_{p=1}^P$  en est une base, il existe un vecteur  $U_p^k(\mu)$  tel que :

$$u(\mu)_p^k = \sum_{i=1}^P U_p^{(i,k)}(\mu) w_i \quad U_p^k(\mu) \in \mathbb{R}^P$$

en prenant  $v = w_j$ ,  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} m\left(\sum_{i=1}^P U_p^{(i,k)}(\mu) - U_p^{(i,k-1)}(\mu) w_i, w_j; \mu\right) + a\left(\sum_{i=0}^P U_p^{(i,k)}(\mu) w_i, w_j; \mu\right) &= f(w_j; \mu) \\ \sum_{i=1}^P U_p^{(i,k)}(\mu) - U_p^{(i,k-1)}(\mu) \frac{1}{\delta t} m(w_i, w_j; \mu) + \sum_{i=0}^P U_p^{(i,k)}(\mu) a(w_i, w_j; \mu) &= f(v; \mu) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\delta t} M_p^{\mu} (U_p^k(\mu) - U_p^{k-1}(\mu)) + A_p^{\mu} U_p^k(\mu) = F^{\mu}} \quad (12)$$

Puis nous utilisons les décompositions affines des formes bilinéaire et linéaire afin de décomposer la matrice  $A_p^{\mu}$  et le vecteur  $F_p^{\mu}$  :

$$\begin{aligned} (A_{i,j}) &= a(w_i, w_j; \mu) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\kappa}} \theta_k^{\kappa}(\mu) a_k(w_i, w_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\kappa}} \theta_k^{\kappa}(\mu) (A_{i,j}^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_i) &= f(w_i; \mu) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{fh+1}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{fh+1}} \theta_k^{fh}(\mu) (F_i^k) \end{aligned}$$



Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\delta t} M_p (U_p^k(\mu) - U_p^{k-1}(\mu)) + \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) A_p^k U_p^k(\mu) = \sum_{k=1}^{N_{fh}+1} \theta_k^{fh}(\mu) F^k} \quad (13)$$

Ou de façon équivalente :

$$\boxed{\left( \frac{1}{\delta t} M_p + \sum_{k=1}^{N_\kappa} \theta_k^\kappa(\mu) A_p^k \right) U_p^k(\mu) = \sum_{k=1}^{N_{fh}+1} \theta_k^{fh}(\mu) F^k + M_p U_p^{k-1}(\mu)} \quad (14)$$

Nous remarquons que les matrices et vecteurs présents ne dépendent plus du paramètre  $\mu$ , il est donc possible de les pré-calculer.

Pour un temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , partant de cette équation nous pouvons trouver  $u_p^k(\mu)$  en résolvant un système linéaire de dimension  $P$ . Ainsi, résoudre entièrement le problème revient à résoudre  $K$  systèmes de dimension  $P$ . Dans le cas stationnaire, nous avons vu que résoudre un système de ce type et en assembler la solution BR coûte  $\mathcal{O}(P \times N + P^3)$  calculs. Comme l'opération est répétée ici  $K$  fois, nous avons un coût algorithmique de  $\mathcal{O}(K(P \times N + P^3))$ . Si  $P$  est faible devant  $N$ , alors la méthode peut être très intéressante comparé au  $\mathcal{O}(KN^3)$  calculs nécessaires en EF, surtout si  $K$  est grand.

Cette fois-ci il nous faut cependant un échantillonnage en espace et en temps. Il est possible d'utiliser un algorithme glouton pour construire cet échantillon. Cependant, ce n'est pas recommandé, il est préférable d'utiliser un algorithme mixte POD en temps et glouton en espace. Cet algorithme dépend de deux paramètres  $N_1$  et  $N_2$  dont nous discuterons après, l'algorithme est le suivant :

---

**Algorithm 3** Algorithme POD-greedy

---

**Require:**  $\varepsilon, \mu_1, n = 1, N_1 \in \mathbb{N}, N_2 \in \mathbb{N}, N = N_1 - N_2, \mathcal{Z} = 0$

- 1: **while**  $\eta(\mu_n) > \varepsilon$  **do**
  - 2: Calculer  $\{u_\delta^k(\mu_n)\}_{k=1}^K$  l'ensemble des solutions EF pour tous temps, pour  $\mu_n$
  - 3: Calculer la base  $N_1$ -POD, i.e.  $\{\zeta_n\}_{l=1}^{N_1} = \text{POD}(\{u_\delta^k(\mu)\}_{k=1}^K; N_1)$
  - 4:  $\mathcal{Z} \leftarrow \{\mathcal{Z}, \{\zeta_n\}_{l=1}^{N_1}\}$
  - 5:  $N \leftarrow N + N_2$
  - 6: Calculer la base  $N$ -POD donnée par  $\{\xi_l\}_{l=1}^N = \text{POD}(\mathcal{Z}; N)$
  - 7:  $V_p \leftarrow \text{Vect}(\{\xi_l\}_{l=1}^N)$
  - 8:  $\mu_{n+1} = \arg \max_{\mu \in \mathcal{D}_h} \eta(\mu) = \arg \max_{\mu \in \mathcal{D}_h} \|u_\delta^K(\mu) - u_p^K(\mu)\|_{V_\delta}$
  - 9:  $n = n + 1$
  - 10: **end while**
-

L'idée de l'algorithme est la suivante : nous commençons avec  $\mu_1$  quelconque dans  $\mathcal{D}_h$  la discrétisation de l'espace des paramètres. Partant de ce  $\mu_1$ , nous calculons sa trajectoire en temps, i.e. la solution EF  $u_\delta^k(\mu_1)$ ,  $\forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ . Nous compressons alors cette base en une base  $N_1$ -POD, en utilisant donc l'algorithme POD, d'où l'appellation «POD en temps».

La base  $N_1$ -POD obtenue est ajoutée dans la base intermédiaire  $\mathcal{Z}$  sur la quelle nous appliquons ensuite l'algorithme POD pour obtenir une base  $(N + N_2)$ -POD. Cette étape sert à supprimer l'information redondante entre les différentes trajectoires en temps des  $\mu$  utilisés. Nous pouvons remarquer que nous initialisons  $N$  à  $N_1 - N_2$ , de façon à avoir  $\mathcal{Z} = \{\{\zeta_n\}_{n=1}^{N_1}\}$  à la première itération. En effet, lors de la première itération,  $\mathcal{Z}$  ne contient pas d'éléments, il ne peut donc pas y avoir redondance de l'information.

Notre base réduite  $V_p$  est alors donnée par cette base  $(N + N_2)$ -POD. Nous appliquons ensuite la partie gloutonne en espace, c'est-à-dire que nous cherchons le  $\mu \in \mathcal{D}_h$  pour lequel l'erreur entre la solution EF et la solution BR est maximale au temps final. Nous choisissons le temps final  $t^K$  car c'est le plus souvent le «sup» de l'erreur pour tous les temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ . Cela correspond donc à l'erreur dans la norme de  $\mathcal{C}^1([0, T], H^1(\Omega))$ . En répétant ce processus, nous obtenons finalement une base réduite contenant des éléments issus de solutions pour différentes valeurs de  $\mu$  et de  $K$ .

Dans cette algorithme, le choix de  $N_1$  et  $N_2$  est primordial. Il faut qu'ils soient suffisamment élevés pour ne pas perdre d'informations, mais aussi suffisamment faibles pour ne pas gonfler la base réduite inutilement. De plus, dans la version de l'algorithme que nous avons présentée ici, nous les prenons constants, mais il peut-être plus adapté de les choisir à chaque itération. De cette façon, à chaque itération nous les choisissons en utilisant le critère d'erreur (2) que nous avons vu dans la partie (1.2.4).

# Troisième partie

## Équations de Stokes

### 4 Équations de Stokes stationnaires

#### 4.1 Présentation du problème

Nous souhaitons utiliser la méthode des bases réduites sur les équations de Stokes. Nous cherchons  $(\tilde{u}(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$  solution du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_\mu)$  suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\mu) : \begin{cases} -\nu_\mu \Delta \tilde{u}(\mu) + \nabla p(\mu) = f_\mu & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \tilde{u}(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}(\mu) = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_\mu \frac{\partial \tilde{u}(\mu)}{\partial \vec{n}} - p(\mu) \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $\nu_\mu$  une constante positive,  $f_\mu$  une fonction  $(L^2(\Omega))^2$ ,  $h$  une fonction de  $H^{1/2}(\Omega)$  et  $h_\mu$  une fonction  $(L^2(\Gamma))^2$ . Nous avons choisi d'utiliser une fonction  $g$  indépendante de  $\mu$  pour rester dans un cadre suffisamment simple. Néanmoins il est tout à fait possible de prendre une fonction  $g_\mu$  puis d'utiliser l'EIM afin de la décomposer.

Nous devons de nouveau traiter le cas des conditions de Dirichlet non-homogènes afin de pouvoir construire des bases réduites. Nous posons  $\mu_0 \in \mathcal{D}$  une valeur quelconque de  $\mu$  et nous posons  $\varphi_0 = u(\mu_0)$  la solution associée. Nous avons donc  $\varphi_0 \in (H^1(\Omega))^2$  solution du problème  $(\mathcal{R})$  suivant :

$$(\mathcal{R}) : \begin{cases} -\nu_\mu \Delta \varphi_0 + \nabla p(\mu_0) = f_{\mu_0} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \varphi_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi_0 = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} - p(\mu_0) \vec{n} = h_{\mu_0} & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Nous posons ensuite  $u = \tilde{u} - \varphi_0$  pour obtenir :

$$\Delta \tilde{u} = \Delta(u + \varphi_0) = \Delta u + \Delta \varphi_0$$

$$\nabla \cdot \tilde{u} = \nabla \cdot (u + \varphi_0) = \nabla \cdot u + \nabla \cdot \varphi_0 = \nabla \cdot u$$

$$u \cdot \vec{n} = (\tilde{u} - \varphi_0) \cdot \vec{n} = \tilde{u} \cdot \vec{n} - \varphi_0 \cdot \vec{n} = h - h = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial (u + \varphi_0)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}}$$

Ce qui nous ramène au problème, trouver  $(u(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$  solution du

problème ( $\mathcal{P}$ ) suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\nu_\mu \Delta u + \nabla p = f_\mu + \Delta \varphi_0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_\mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $\nu_\mu$  une constante positive,  $f_\mu$  dans  $(L^2(\Omega))^2$  et  $h_\mu$  dans  $(L^2(\Gamma))^2$ . Nous posons à présent les espaces  $V := (H_0^1(\Omega, \Gamma_{Dir}))^2$  et  $Q := L^2(\Omega)$  (ou  $Q = L_0^2(\Omega)$  si  $\Gamma_{Neu} = \emptyset$ ). Ainsi, pour tout  $(v, q) \in V \times Q$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned} -\nu_\mu \Delta u + \nabla p &= f_\mu - \Delta \varphi_0 \\ -\nu_\mu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v &= f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \\ - \int_\Omega \nu_\mu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v \, dX &= \int_\Omega f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \, dX \\ \int_\Omega \nu_\mu \nabla u : \nabla v - p(\nabla \cdot v) \, dX &= \int_\Omega f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \, dX + \int_\Gamma \left( \nu_\mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} \right) \cdot v \, dS \\ \int_\Omega \nu_\mu \nabla u : \nabla v - p(\nabla \cdot v) \, dX &= \int_\Omega f_\mu \cdot v - \nabla \varphi_0 : \nabla v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \, dS \end{aligned}$$

$$\boxed{a(u, v; \mu) + b(p, v) = f(v; \mu)} \quad (15)$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $f$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_\Omega \nu_\mu \nabla u : \nabla v \, dX \\ b(p, v) &= - \int_\Omega p(\nabla \cdot v) \, dX \\ f(v; \mu) &= \int_\Omega f_\mu \cdot v - \nabla \varphi_0 : \nabla v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \, dS \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= 0 \\ q(\nabla \cdot u) &= 0 \\ \int_\Omega q(\nabla \cdot u) \, dX &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{b(q, u) = 0} \quad (16)$$

Nous pouvons alors écrire le problème de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (v, q) \in V \times Q : \\ a(u, v; \mu) + b(p, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Nous souhaitons montrer que le problème variationnel (17) admet une unique solution, pour cela nous rappelons le théorème suivant :

**Théorème 3.**

Soient  $X$  et  $Q$  deux espaces de Hilbert,  $a$  et  $b$  deux formes bilinéaires continues :

$$\begin{aligned} a : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} & b : Q \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow a(u, v) & (q, v) &\longrightarrow b(q, v) \end{aligned}$$

et  $L, l$  deux formes linéaires continues :

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow \mathbb{R} & l : Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow L(v) & q &\longrightarrow l(q) \end{aligned}$$

Nous considérons alors le problème suivant : trouver  $(u, p) \in X \times Q$  solution de

$$\begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = L(v) & \forall v \in X \\ b(q, u) = l(q) & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (18)$$

Si :

(i) la forme bilinéaire  $a$  est elliptique sur  $\mathcal{N}$  le noyau de la forme bilinéaire  $b$ , i.e.

$$\exists \alpha > 0, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in \mathcal{N}$$

(ii) la forme bilinéaire  $b$  satisfait la condition inf-sup, i.e.

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{q \in Q} \sup_{v \in X} \frac{b(q, v)}{\|v\|_X \|q\|_Q} \geq \beta \quad (19)$$

Alors le problème (18) admet une unique solution.

De plus, nous associons à la forme  $b$  l'opérateur  $B : X \longrightarrow Q'$ , ainsi que son opérateur dual  $B' : Q \longrightarrow X'$  défini par :

$$\forall v \in X, \forall q \in Q, \quad \langle q, Bv \rangle_{Q, Q'} = \langle B'q, v \rangle_{X', X} = b(q, v).$$

Puis nous introduisons un espace  $V$  ainsi que son orthogonal et son polaire dans  $X$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{v \in X; b(q, v) = 0, \forall q \in Q\} = \ker(B) \\ \mathcal{N}^\perp &= \{v \in X; (v, w)_X = 0, \forall w \in V\} \\ \mathcal{N}^0 &= \{l \in X'; \langle l, w \rangle_{X', X} = 0, \forall w \in V\}. \end{aligned}$$

Nous rappelons ensuite le théorème de Babuška-Brezzi :

**Théorème 4.** (*Babuška-Brezzi*)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in X} \frac{b(q, v)}{\|v\|_X \|q\|_Q} \geq \beta.$$

(ii) L'opérateur  $B'$  est un isomorphisme de  $Q$  sur  $\mathcal{N}^0$  et il existe  $\beta > 0$  telle que

$$\forall q \in Q, \quad \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_Q$$

(iii) L'opérateur  $B$  est un isomorphisme de  $\mathcal{N}^\perp$  sur  $Q'$  et il existe  $\beta > 0$  telle que

$$\forall v \in \mathcal{N}^\perp, \quad \|Bv\|_{Q'} \geq \beta \|v\|_Q$$

Ce théorème est très utile pour traiter plus simplement la condition *inf-sup* (19), il suffit simplement de montrer que pour tout  $q \in Q$ , il existe  $v \in X$  tel que  $Bv = q$  et  $\|v\|_X \leq C \|q\|_{Q'}$ . Nous avons introduit tous les outils dont nous avons besoin.

Dans notre problème variationnel, nous avons  $X = V = (H_0^1(\Omega, \Gamma_{Dir}))^2$ ,  $Q := L^2(\Omega)$  et l'opérateur  $B : v \rightarrow \nabla \cdot v$ . Nous munissons  $V$  et  $Q$  des normes usuelles, respectivement  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  et  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ , nous savons que pour ces normes ils sont complets. Nous nous intéressons alors à la forme bilinéaire  $a$ , pour tout  $u, v \in V$  :

$$\begin{aligned} |a(u, v; \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \nu_{\mu} \nabla u : \nabla v \, dX \right| \\ &\leq \nu_{\mu} \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \nu_{\mu} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Donc  $a$  est continue en 0 et par linéarité,  $a$  est continue sur tout  $V \times V$ . Nous avons ensuite, pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} a(v, v; \mu) &= \int_{\Omega} \nu_{\mu} \nabla v : \nabla v \, dX \\ &= \nu_{\mu} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Or si  $\Gamma_{Dir} \neq \emptyset$ , alors nous pouvons utiliser l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} a(v, v; \mu) &= \nu_{\mu} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \frac{\nu_{\mu}}{1 + C^2} \|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

La forme  $a$  est donc elliptique sur tout  $V \times V$ , donc en particulier sur  $\mathcal{N} \subset V$ . Nous nous intéressons à la continuité de la forme bilinéaire  $b$ , pour tout  $q \in Q$  et pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} |b(q, v)| &= \left| \int_{\Omega} q(\nabla \cdot v) \, dX \right| \\ &\leq \|q\|_{0,\Omega} \int_{\Omega} |\nabla \cdot v| \, dX \\ &\leq \|q\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|q\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Nous avons bien que  $b$  est continue en 0 et, par linéarité, sur tout  $V \times Q$ . Nous nous intéressons finalement à la forme linéaire  $f$ , pour tout  $v \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
|f(v)| &= \left| \int_{\Omega} f_{\mu} \cdot v - \nabla \psi_0 : \nabla v \, dX + \int_{\Gamma_{N_{eu}}} \left( h_{\mu} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \, dS \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f_{\mu} \cdot v| \, dX + |a(\psi_0, v)| + \int_{\Gamma_{N_{eu}}} \left| \left( h_{\mu} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \right| \, dS \\
&\leq \|f_{\mu}\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|\psi_0\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \left( \|h_{\mu}\|_{H^{1/2}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{n}} \right\|_{H^{1/2}(\Omega)} \right) \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Omega)} \\
&\leq \left( \|f_{\mu}\|_{0,\Omega} + \|\psi_0\|_{1,\Omega} + \|h_{\mu}\|_{H^{1/2}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{n}} \right\|_{H^{1/2}(\Omega)} \right) \|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Nous avons alors que  $f$  est continue en 0 et, par linéarité, sur tout  $V$ . Il ne nous reste plus qu'à vérifier la condition *inf-sup* pour pouvoir utiliser le théorème d'existence et d'unicité.

Soit  $q \in Q := L^2(\Omega)$ , nous posons le problème suivant : chercher  $w \in H^2(\Omega)$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta w = q & \text{sur } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous avons vu dans la partie (2.1) que ce genre de problème admet une unique solution  $w \in H^2(\Omega)$ . Nous posons  $v = -\nabla w$ , ainsi  $v$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\nabla \cdot v = -\nabla \cdot \nabla w = q$$

et il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned}
\|w\|_{2,\Omega}^2 &\leq C^2 \|q\|_{0,\Omega}^2 \\
\|w\|_{0,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2 + |w|_{2,\Omega}^2 &\leq C \|q\|_{0,\Omega}^2 \\
\|w\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2 &\leq C \|q\|_{0,\Omega}^2 \\
\Rightarrow \|v\|_{1,\Omega} &\leq C \|q\|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Babuška-Brezzi (4), nous avons que la condition *inf-sup* est respectée par la forme bilinéaire  $b$ . Nous pouvons ainsi utiliser le théorème d'existence et d'unicité (3) pour affirmer que notre problème variationnel admet bien une unique solution  $(u, p) \in V \times Q$ .

Comme dans le cas de la chaleur instationnaire, nous pouvons montrer que la solution du problème variationnel est aussi solution du problème  $(\mathcal{P}_{\mu})$ . Soit  $(u, p)$  l'unique solution du problème variationnel et soit  $\varphi \in (\mathcal{D})^2 \subset V$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
a(u, \varphi) + b(p, \varphi) - f(\varphi) &= 0 \\
\int_{\Omega} \nu_{\mu} \nabla u : \nabla \varphi - p(\nabla \cdot \varphi) - f \cdot \varphi \, dX &= 0 \\
- \int_{\Omega} \nu_{\mu} \Delta u \cdot \varphi - \nabla p \cdot \varphi + f \cdot \varphi \, dX &= 0 \\
\int_{\Omega} (\nu_{\mu} \Delta u - \nabla p + f) \cdot \varphi \, dX &= 0 \quad \forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \subset (L^2(\Omega))^2, \text{ par densité} \\
\int_{\Omega} (\nu_{\mu} \Delta u - \nabla p + f) \cdot v \, dX &= 0 \quad \forall v \in (L^2(\Omega))^2 \\
(\nu_{\mu} \Delta u - \nabla p + f) \in (L^2(\Omega)^2)^{\perp} &\Rightarrow -\nu_{\mu} \Delta u + \nabla p = f \quad \text{p.p. sur } \Omega
\end{aligned}$$

Soit  $v \in (L^2(\Omega))^2$  et  $(u, p)$  l'unique solution du problème variationnel :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - p(\nabla \cdot v) - f \cdot v \, dX - \int_{\Gamma_{Neu}} h_{\mu} \cdot v \, dS = 0 \\ & - \int_{\Omega} \nu_{\mu} \Delta u \cdot v - \nabla p \cdot v + f \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( \nu_{\mu} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} \right) \cdot v \, dS - \int_{\Gamma_{Neu}} h_{\mu} \cdot v \, dS = 0 \\ & - \int_{\Omega} (\nu_{\mu} \Delta u - \nabla p + f) \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( \nu_{\mu} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} - h_{\mu} \right) \cdot v \, dS = 0 \end{aligned}$$

Or nous venons de montrer que  $\nu_{\mu} \Delta u - \nabla p + f = 0$  presque partout sur  $\Omega$ , nous avons donc :

$$\int_{\Gamma_{Neu}} \left( \nu_{\mu} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} - h_{\mu} \right) \cdot v \, dS = 0$$

$$\left( \nu_{\mu} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} - h_{\mu} \right) = 0 \in (L^2(\Gamma_{Neu}))^{\perp} \Rightarrow -\kappa_{\mu} \nu_{\mu} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = h_{\mu} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_{Neu}$$

Finalement, comme  $u \in V$ , nous avons :  $u = 0$  sur  $\Gamma_{Dir}$ , et donc nous avons bien que  $(u, p)$  est l'unique solution de  $(\mathcal{P}_{\mu})$ .



## 4.2 Discrétisation et résolution en éléments finis

Soit  $\mathcal{T}_\delta$  une triangulation du domaine, de pas  $\delta$ . Nous devons bien choisir les espaces éléments finis pour respecter la condition *inf-sup* des équations de Stokes. Nous prenons  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_2}$  la famille des fonctions de forme  $P2$  et  $\{\psi_k\}_{k=1}^{N_1}$  la famille des fonctions de forme  $P1$ . Nous posons alors :

$$V_\delta := (\text{Vect}(\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_2})) \quad Q_\delta := \text{Vect}(\{\psi_k\}_{k=1}^{N_1})$$

Nous avons donc  $V_\delta \times Q_\delta \subset V \times Q$  et nous pouvons réécrire notre problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_\delta, p_\delta) \in V_\delta \times Q_\delta \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_\delta \times Q_\delta : \\ a(u_\delta, v; \mu) + b(p_\delta, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u_\delta) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Or comme  $(u_\delta, p_\delta) \in V_\delta \times Q_\delta$ , il existe  $(U_{1,\delta}^i)_{i=1}^{N_2}$ ,  $(U_{2,\delta}^i)_{i=1}^{N_2}$  et  $(P_\delta^i)_{i=1}^{N_1}$  tels que :

$$u_\delta = \begin{pmatrix} u_{1,\delta} \\ u_{2,\delta} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_2} \begin{pmatrix} U_{1,\delta}^i \varphi_{1,i} \\ U_{2,\delta}^i \varphi_{2,i} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i \varphi_i \quad p_\delta = \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^i \psi_i$$

En injectant ces expressions dans les équations (20), nous obtenons :

$$\begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i \varphi_i, v; \mu\right) + b\left(\sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^i \psi_i, v\right) = f(v; \mu) \\ b\left(q, \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i \varphi_i\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i a(\varphi_i, v; \mu) + \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^i b(\psi_i, v) = f(v; \mu) \\ \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i b(q, \varphi_i) = 0 \end{cases}$$

En prenant finalement  $v = \varphi_j$ , pour  $j \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket$  et  $q = \psi_k$ , pour  $k \in \llbracket 1, N_1 \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) + \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^i b(\psi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j; \mu) \\ \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^i b(\psi_k, \varphi_i) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A(\mu) & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\delta \\ P_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\mu) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec les matrices  $A$  et  $B$  dont les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} (A(\mu))_{i,j} &= a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) & 1 \leq i, j \leq N_2 \\ (B)_{k,i} &= b(\psi_k, \varphi_i) & 1 \leq i \leq N_2, \quad 1 \leq k \leq N_1 \end{aligned}$$

Et de la même façon le vecteur  $F(\mu)$  est donné par :

$$\left(F(\mu)\right)_i = f(\varphi_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq N_2$$

Pour résoudre le problème avec des éléments finis nous devons donc résoudre un système linéaire de dimension  $(N_1 + N_2)$ . Il faut ensuite ajouter la fonction de relèvement  $\varphi_0$  en vitesse pour obtenir la solution  $(\tilde{u}(\mu), p(\mu))$  attendue.

### 4.3 Problème en base réduite

Nous souhaitons utiliser la méthode des bases réduites sur ces équations. Pour cela supposons que les formes  $a(\cdot, \cdot; \mu)$  et  $f(\cdot; \mu)$  se décomposent affinement par rapport à  $\mu$ . Nous avons donc :

$$a(u, v; \mu) = \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(u, v) \quad f(v; \mu) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(v)$$

Pour que  $f(\cdot; \mu)$  admette une décomposition de la sorte, il faut que  $f_\mu$  et  $h_\mu$  admettent chacune des décompositions affines par rapport à  $\mu$ . Rappelons que si le problème n'admet pas directement de décomposition de la sorte, il est toujours possible d'utiliser l'EIM pour en obtenir une. Nous pouvons alors injecter ces décompositions dans la formulation variationnelle (17) pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (q, v) \in V \times Q : \\ \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(u, v) + b(p, v) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(v) \\ b(q, u) = 0 \end{array} \right.$$

Nous posons  $S = \{\mu_p\}_{p=1}^P$  un échantillon de  $P$  valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$  toutes distinctes et  $\{(w_p, s_p)\}_{p=1}^P$  la famille de solutions associées, avec  $w_p := u_\delta(\mu_p)$  et  $s_p := p_\delta(\mu_p)$ . Pour chaque  $\mu_p$ , nous avons que  $(w_p, s_p) \in V_\delta \times Q_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p \times Q_p := \text{Vect}(\{w_p\}_{p=1}^P) \times \text{Vect}(\{s_p\}_{p=1}^P) \subset V_\delta \times Q_\delta \subset V \times Q$$

En supposant que  $V_p \times Q_p$  réalise une bonne approximation  $V \times Q$  notre problème (20) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_p, p_p) \in V_p \times Q_p \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_p \times Q_p : \\ a(u_p, v; \mu) + b(p_p, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u_p) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_p, p_p) \in V_p \times Q_p \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_p \times Q_p : \\ \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(u_p, v; \mu) + b(p_p, v) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(v) \\ b(q, u_p) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

### 4.3.1 Approche classique

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $u_p \in V_p$  et  $p_p \in Q_p$ , il existe deux vecteurs  $U_p(\mu)$  et  $P_p(\mu)$ , chacun de taille  $P$ , tels que :

$$\begin{pmatrix} u_{1,p} \\ u_{2,p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \begin{pmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_p = \sum_{i=1}^P P_p^i(\mu) s_i$$

En injectant ces décompositions dans la forme variationnelle (21) et en prenant  $v = w_j$  et  $q = s_j$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k \left( \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) w_i, w_j \right) + b \left( \sum_{i=1}^P P_p^i(\mu) s_i, w_j \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \\ b \left( \sum_{i=1}^P P_p^i(\mu) s_j, w_i \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^P P_p^i(\mu) b(s_i, w_j) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \\ \sum_{i=1}^P P_p^i(\mu) b(s_j, w_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) A_p^k & (B_p)^t \\ B_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p(\mu) \\ P_p(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) F_p^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec  $A_p^k$ ,  $B_p$  et  $F_p^k$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} (A_p^k)_{i,j} &= a_k(w_i, w_j) & 1 \leq k \leq N_a, \quad 1 \leq i, j \leq P \\ (B_p)_{i,j} &= b(s_i, w_j) & 1 \leq i, j < P \\ (F_p^k)_i &= f_k(w_i) & 1 \leq k \leq N_f, \quad 1 \leq j \leq P \end{aligned}$$

Nous avons toujours des matrices  $\{A_p^k\}_{k=1}^{N_a}$  et des vecteurs  $\{F_p^k\}_{k=1}^{N_f}$  indépendants de  $\mu$  et pouvant donc être pré-calculés. Cependant, après assemblage nous obtenons ici un système de dimension  $2P$ . La résolution de ce système nous permet d'obtenir à la fois une décomposition  $U_p(\mu)$  de la vitesse dans  $V_p$  et une décomposition  $P_p(\mu)$  de la pression dans  $Q_p$ .

Cependant, nous remarquons que dans cette formulation, les valeurs de  $U_p(\mu)$  sont fixées uniquement par la partie  $B_p U_p(\mu) = 0$  du système (ce qui rappelle la condition *inf-sup* discrète en EF). Or cela induit généralement  $U_p(\mu)$ , ce qui n'est pas correct. Pour faire fi de ce problème, il nous suffit d'ajouter d'avantage de fonction  $u(\mu)$  dans la base réduite de la vitesse. Ou nous pouvons utiliser l'opérateur de suprématie évoqué dans [5]

### 4.3.2 Approche monolithique

Contrairement aux éléments finis, les bases réduites proposent une autre approche intéressante. Puisque nous avons le même nombre d'éléments dans la base de  $V_p$  et dans la base de  $Q_p$ , nous pouvons utiliser une approche monolithique. Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $(u_p(\mu), p_p(\mu)) \in V_p \times Q_p$ , il existe un vecteur  $\alpha_p(\mu)$  tel que :

$$(u_p(\mu), p_p(\mu)) = \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu)(w_i, s_i) \quad \alpha_p(\mu) \in \mathbb{R}^P$$

en prenant  $v = w_j$  et  $q = s_j$ ,  $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) w_i, w_j; \mu \right) + b \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) s_i, w_j \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \\ b \left( s_j, \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) w_i \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) \left( \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(w_i, w_j) + (b(s_i, w_j) - b(s_j, w_i)) \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left( \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) A_p^k + ((B_p)^t - B_p) \right) \alpha_p(\mu) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) F_p^k} \quad (22)$$

Où les matrices  $A_p^k$ ,  $1 \leq k \leq N_a$ , et  $B_p$  sont données par :

$$\begin{aligned} (A^k)_{i,j} &= a_k(w_i, w_j) & 1 \leq k \leq N_a, & \quad 1 \leq i, j \leq P \\ (B)_{i,j} &= b(s_i, w_j) & & \quad 1 \leq i, j \leq P \end{aligned}$$

et les vecteurs  $F^k$  par :

$$(F^k)_i = f_k(w_i) \quad 1 \leq k \leq N_f, \quad 1 \leq i \leq P$$

Comme pour l'approche classique, nous obtenons des matrices  $\{A_p^k\}_{k=1}^{N_a}$  et des vecteurs  $\{F_p^k\}_{k=1}^{N_f}$  indépendants de  $\mu$ . Il est d'ailleurs facile de voir que ces matrices et vecteurs vont être identiques à ceux de l'approche classique. La grosse différence est qu'ici pour résoudre le problème en base réduite, il nous faut inverser un système linéaire de dimension  $P$ .

La résolution du problème en EF demande  $\mathcal{O}((2N^2 + N^1)^3)$  calculs, où  $N^1$  est le nombre de Degrés De Liberté (DDL) des éléments  $P^1$  et  $N^2$  le nombre des DDL  $P^2$ . En comptant l'assemblage du système par rapport à  $\mu$ , la résolution et l'assemblage de la solution, la résolution du problème en base réduite demande  $\mathcal{O}(P \times (N^1 + N^2) + 8P^3)$  calculs avec l'approche classique et  $\mathcal{O}(P \times (N^1 + N^2) + P^3)$  calculs avec l'approche monolithique. Donc si  $P$  est faible devant  $N^1$  et  $N^2$ , l'utilisation d'une base réduite peut-être très économique.

#### 4.4 Observations et remarques

Dans le cas des équations de Stokes, la vitesse et la pression ont très souvent des valeurs éloignées. Ceci entraîne souvent de mauvais conditionnement pour les matrices des systèmes à inverser. Les matrices issues des bases réduites n'échappent pas à la règle, ainsi quelle que soit l'approche le conditionnement sera toujours mauvais.

Cependant, l'approche monolithique apporte quelques avantages. En effet, la matrice du système dans l'approche classique présente un gros bloc creux, qui peut influencer sur son inversibilité. En revanche, l'approche monolithique nous permet d'obtenir une matrice pleine, de taille 2 fois inférieure, nous faisons donc des économies de calculs, de stockage et son inversibilité ne pose plus problème.

Pour ce qui est de l'approche classique, l'avantage principal est que la décomposition en vitesse est indépendante de celle en pression. Nous pouvons donc espérer obtenir les décompositions optimales pour chacune d'entre elles, et donc une erreur moindre. Cependant, après plusieurs utilisations nous avons remarqué que la pression était souvent plus «régulière» que la vitesse. En théorie, nous avons que  $p \in L^2(\Omega)$  et  $u \in (H^1(\Omega))^2$ , donc la vitesse est plus régulière. Mais dans nos exemples, comme  $f = 0$ , la pression est linéaire et donc bien plus régulière que seulement  $L^2(\Omega)$ . Ainsi, l'erreur en vitesse domine l'erreur en pression, donc lorsque la base approxime correctement la vitesse, la même décomposition approximera correctement la pression.

De ce constat nous pouvons tirer deux perspectives pour les bases réduites en Stokes. Pour commencer, comme la pression est plus «régulière» que la vitesse lorsque  $f = 0$ , peut-être qu'une approximation construite uniquement à partir d'informations sur la vitesse pourrait permettre de reconstruire la pression. C'est-à-dire que nous n'utiliserions que la forme bilinéaire  $a$  et la forme linéaire  $f$ . Cette idée de reconstruire la pression en utilisant uniquement des informations sur la vitesse présente un intérêt certain et est un de nos objectifs principaux.

Toujours sur la même idée de régularité de la pression, il est tout à fait envisageable de créer deux bases réduites séparées, une pour la vitesse et une pour la pression. Ainsi, si la pression s'approxime plus facilement, nous obtiendrons une base plus petite pour celle-ci. En utilisant une approche similaire à l'approche classique présentée, nous pourrions obtenir une matrice plus petite que  $2P$ , plus «inversible» que celle de l'approche classique et en même temps mieux conditionnée que la matrice de l'approche monolithique. En somme, cette base serait un bon compromis entre les deux méthodes.

## 4.5 Exemple

Afin d'illustrer les aspects théoriques, nous proposons l'exemple suivant :  
 Pour  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in [10^{-3}, 10^{-4}] \times [0, 10]$ , nous cherchons  $(u(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$  solution du problème  $(\mathcal{P}_\mu)$  suivant :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} -\mu_1 \Delta u(\mu) + \nabla p(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(\mu) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Side} \\ u(\mu) = (\mu_2, 0)^t & \text{sur } \Gamma_{In} \\ \mu_1 \frac{\partial u(\mu)}{\partial \vec{n}} - p(\mu) \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Out} \end{cases}$$

Sur le domaine suivant :

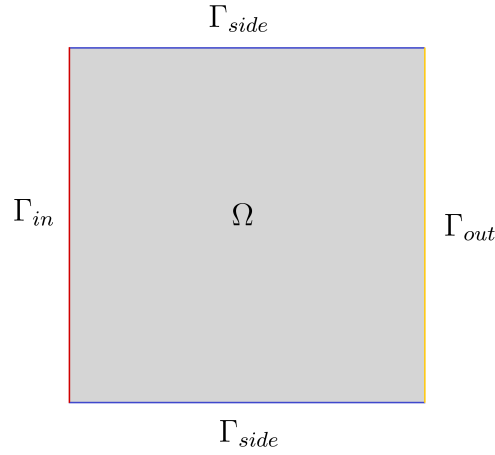
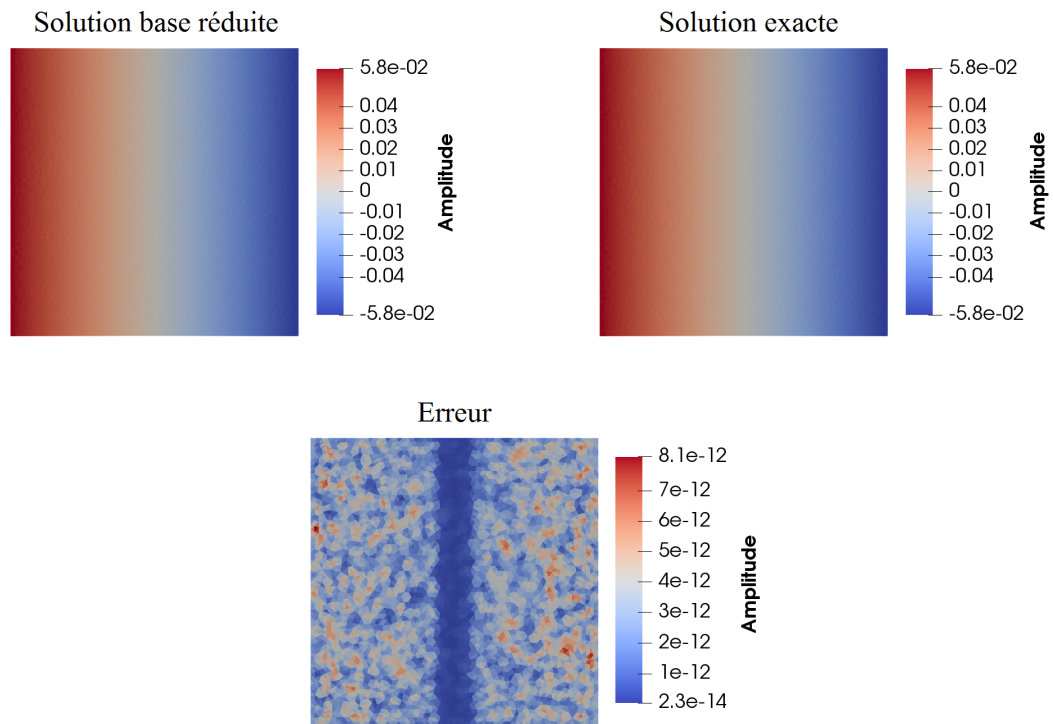
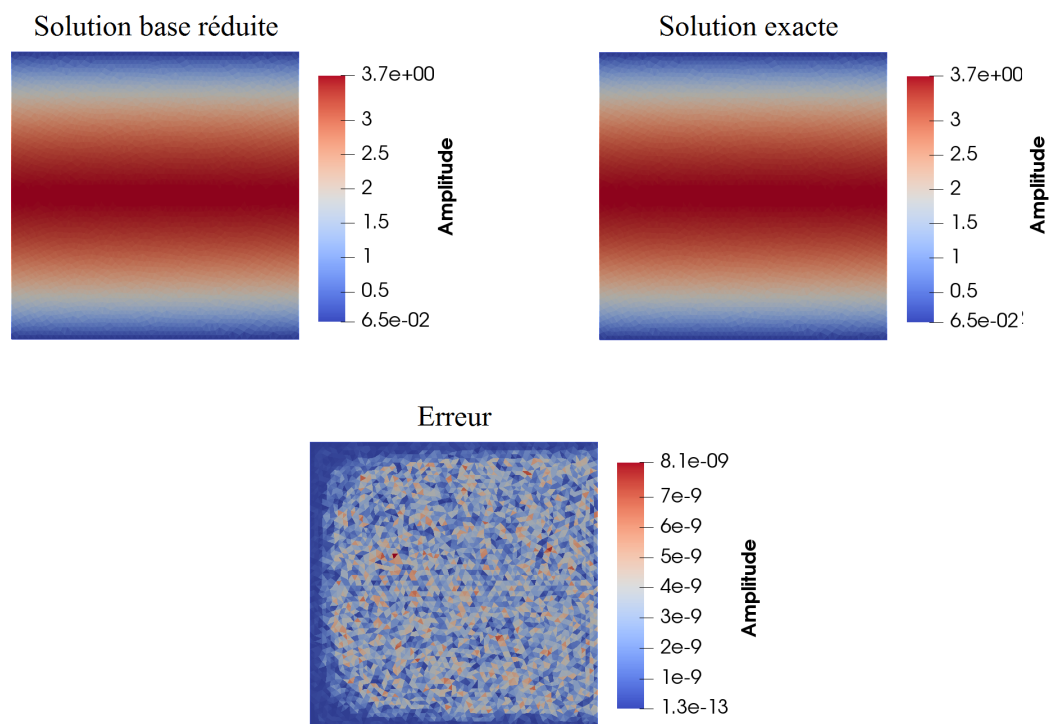


FIGURE 8 – Domaine  $\Omega$

Nous utilisons un algorithme glouton pour construire un échantillon  $S$  de  $P$  valeurs de  $\mu$ , nous utilisons ici l'approche monolithique. Pour obtenir une base réduite de précision  $10^{-6}$ , seuls deux éléments sont suffisants. Nous avons donc qu'un système linéaire  $2 \times 2$  suffit pour résoudre le problème proposé, indépendamment du maillage choisi.

	$\mu_1$	$\mu_2$
$w_1$	$1 \times 10^{-4}$	0.1
$w_2$	$3.75 \times 10^{-4}$	5.2

TABLE 2 – Valeurs de  $\mu$  utilisées

FIGURE 9 – Affichage de la pression  $\mu = (4 \times 10^{-4}, 3.65)$ FIGURE 10 – Affichage de la vitesse  $\mu = (4 \times 10^{-4}, 3.65)$

## 5 Équations de Stokes à géométrie paramétrée

Maintenant que nous avons vu comment déployer des bases réduites sur des équations de Stokes paramétrées, nous souhaitons nous pencher dans le cas précis où le paramètre influe sur la géométrie du domaine.

### 5.1 Présentation du problème

Pour rester dans un contexte simple, nous nous limitons ici à un seul paramètre. Nous posons  $\mathcal{D} := [\mu^{\min}, \mu^{\max}]$  et nous introduisons  $\Omega_\mu$  le domaine déformé selon  $\mu$  de la façon suivante :

$$T_\mu : \quad \begin{aligned} \Omega_\mu &\longrightarrow \hat{\Omega} \\ (x, y) &\longrightarrow (T_{\mu,x}(x, y), T_{\mu,y}(x, y)) \end{aligned}$$

$$T_\mu^{-1} : \quad \begin{aligned} \hat{\Omega} &\longrightarrow \Omega_\mu \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\longrightarrow (T_{\mu,\hat{x}}^{-1}(\hat{x}, \hat{y}), T_{\mu,\hat{y}}^{-1}(\hat{x}, \hat{y})) \end{aligned}$$

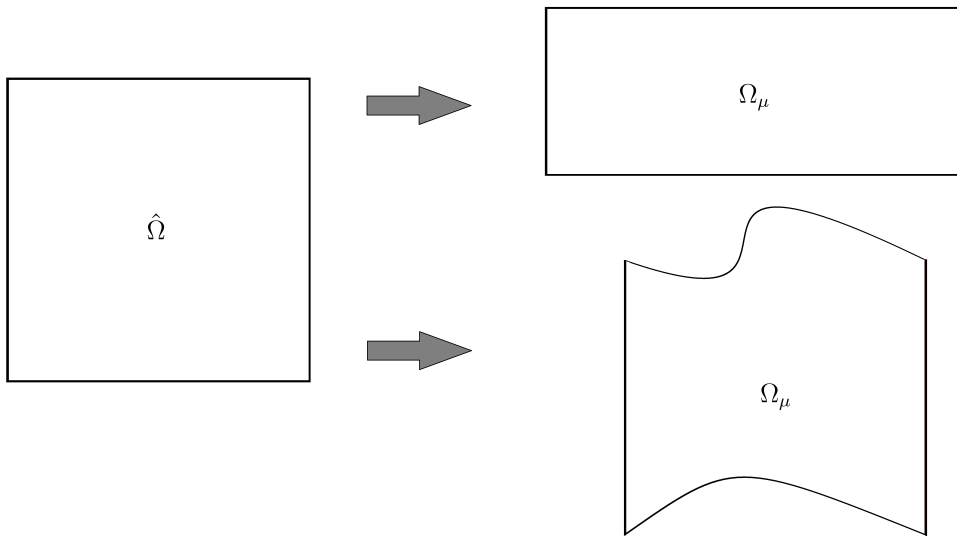


FIGURE 11 – Exemples de déformation

Nous notons  $\hat{\Omega}$  le domaine de référence. L'application réciproque  $T_\mu^{-1}$  permet de déformer ce domaine de référence (en fonction de  $\mu$ ) pour obtenir  $\Omega_\mu$ . *A contrario*,  $T_\mu$  permet de «redresser»  $\Omega_\mu$  pour obtenir  $\hat{\Omega}$ . Pour pouvoir appliquer la méthode des bases réduites, il est nécessaire de connaître ces deux applications.



Partant de cela, nous introduisons le problème suivant :  
 Nous cherchons  $(u(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega_\mu))^2 \times L^2(\Omega_\mu)$  tel que :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f_\mu & \text{dans } \Omega_\mu \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega_\mu \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $f_\mu \in (L^2(\Omega_\mu))^2$  et  $h_\mu \in (L^2(\Gamma_\mu))^2$ . Nous décidons de ne pas imposer de condition de Dirichlet non-homogène pour rester dans un cas simple. Il est cependant possible d'en imposer puis d'utiliser un relèvement pour s'en affranchir (*cf.* (4.1)).

Ce problème est donc posé sur  $\Omega_\mu$ , or pour utiliser une base réduite il nous faut pouvoir combiner linéairement des solutions pour différentes valeurs de  $\mu$ . Pour faire cela, il va nous falloir exprimer ce problème sur le domaine de référence  $\hat{\Omega}$ .

Nous posons  $V := \{v \in (H^1(\Omega_\mu))^2 \mid v|_{\Gamma_{Dir}} = 0\}$ . Soit  $v \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v &= f_\mu \cdot v \\ \int_{\Omega_\mu} -\nu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v \, dX &= \int_{\Omega_\mu} f_\mu \cdot v \, dX \\ \int_{\Omega_\mu} \nu \nabla u : \nabla v + p \nabla \cdot v \, dX &= \int_{\Omega_\mu} f_\mu \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_\mu} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} \right) \cdot v \, dS \\ \int_{\Omega_\mu} \nu \nabla u : \nabla v + p \nabla \cdot v \, dX &= \int_{\Omega_\mu} f_\mu \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu \cdot v \, dS \end{aligned}$$

$$\boxed{a(u, v; \mu) + b(p, v; \mu) = f(v; \mu)} \quad (23)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} \nu \nabla u : \nabla v \, dX \\ b(p, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} p \nabla \cdot v \, dX \\ f(v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} f_\mu \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu \cdot v \, dS \end{aligned}$$

De la même façon nous posons  $Q := L^2(\Omega_\mu)$  et soit  $q \in Q$  :

$$\begin{aligned} q(\nabla \cdot u) &= 0 \\ \int_{\Omega_\mu} q \nabla \cdot u \, dX &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{b(q, u; \mu) = 0} \quad (24)$$

La formulation variationnelle associée au problème  $(\mathcal{P}_\mu)$  est donc donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (q, v) \in V \times Q : \\ a(u, v; \mu) + b(p, v; \mu) = f(v; \mu) \\ b(q, u; \mu) = 0 \end{cases}$$

## 5.2 Déformation des opérateurs

Nous commençons par rappeler les opérateurs vectoriels utilisés ici, soient  $u = (u_1, u_2)^t$  et  $v = (v_1, v_2)^t$  deux éléments de  $(H^1(\Omega))^2$  :

$$\begin{aligned} \nabla &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} & \nabla \cdot u &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \nabla u &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} & \nabla u : \nabla v &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ & & &+ \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ & & &= (\nabla u)^t \nabla v : I \end{aligned}$$

Nous souhaitons alors exprimer ces opérateurs par rapport aux variables du domaine de référence. Pour cela nous nous intéressons au changement de variable :

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\mu(x, y) = (T_{\mu,x}(x, y), T_{\mu,y}(x, y)) \quad (x, y) \in \Omega_\mu$$

Nous donnons alors deux lemmes très importants pour les changements de variables dans des intégrales [15].

### Lemme 1.

Soit  $\Omega_0$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  un difféomorphisme «régulier» et  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $f \in L^p(T(\Omega_0))$  si et seulement si  $f \circ T \in L^p(\Omega_0)$ , et nous avons :

$$\int_{T(\Omega_0)} f \, dX = \int_{\Omega_0} f \circ T |J_T| \, dX \quad (25)$$

D'autre part,  $f \in W^{1,p}(T(\Omega_0))$  si et seulement si  $f \circ T \in W^{1,p}(\Omega_0)$ , et nous avons :

$$(\nabla f) \circ T = ((J_T)^{-1})^t \nabla(f \circ T) \quad (26)$$

### Lemme 2.

Soit  $\Omega_0$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  un difféomorphisme «régulier». Soit  $f \in L^1(\partial T(\Omega_0))$  alors  $f \circ T \in L^1(\partial \Omega_0)$ , et nous avons :

$$\int_{\partial T(\Omega_0)} f \, dS = \int_{\partial \Omega_0} f \circ T |J_T| \left\| ((J_T)^{-1})^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^n} \, dS \quad (27)$$

D'après l'égalité (26), nous avons donc :

$$\boxed{\nabla = J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} = ((J_{T_\mu})^{-1})^t \hat{\nabla}} \quad (28)$$

Où  $J_{T_\mu}$  est la jacobienne de  $T_\mu$  et  $\hat{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}})^t$ .

Nous en déduisons les expressions des opérateurs précédents sur le domaine de référence :

$$\begin{aligned} \nabla &= J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} = J_{T_\mu}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial} \end{pmatrix} & \nabla \cdot u &= J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} \cdot \hat{u} \\ \nabla u &= J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} u = J_{T_\mu}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{u}_2} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{u}_2} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} & \nabla u : \nabla v &= (J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} u) : (J_{T_\mu}^t \hat{\nabla} v) \\ & & &= ((\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} J_{T_\mu}^t \hat{u}) : J_{T_\mu}^t \\ & & &= ((\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u}) : (J_{T_\mu}^t J_{T_\mu}^t) \end{aligned}$$

Nous posons  $\hat{V} = \{\hat{v} \in (H^1(\hat{\Omega}))^2 \mid \hat{v}|_{\Gamma_{Dir}} = 0\}$  et  $\hat{Q} = L^2(\hat{\Omega})$ , puis nous notons  $\hat{u} := u \circ T \in \hat{V}$  et  $\hat{p} := p \circ T \in \hat{Q}$ . En utilisant les expressions précédentes, nous pouvons maintenant reformuler les formes linéaire et bilinéaire comme suit :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} \nu \nabla u : \nabla v \, dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \nu ((\nabla v \circ T_\mu)^t \nabla u \circ T_\mu) : I |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \nu ((\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u}) : (J_{T_\mu}^t J_{T_\mu}^t) |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &= \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(p, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} p \nabla \cdot v \, dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}} (p \circ T_\mu) \nabla \cdot (v \circ T_\mu) |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (J_{T_\mu}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &= \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} f_\mu \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} h_\mu \cdot v \, dS \\ &= \int_{\hat{\Omega}} (f \circ T) \cdot (v \circ T) |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} (h_\mu \circ T_\mu) \cdot (v \circ T_\mu) |J_{T_\mu}| \left\| J_{T_\mu}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} \, d\hat{S} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \, d\hat{X} \\ &\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} \hat{h}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \left\| J_{T_\mu}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} \, d\hat{S} \\ &= \hat{f}(\hat{v}; \mu) \end{aligned}$$

Finalement en utilisant les deux lemmes que nous avons énoncés précédemment, nous avons équivalence entre les deux problèmes variationnels suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (q, v) \in V \times Q : \\ a(u, v) + b(p, v) = f(v) \\ b(q, u) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}, \hat{p}) \in \hat{V} \times \hat{Q} \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V} \times \hat{Q} : \\ \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) + \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}) = \hat{f}(\hat{v}) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}) = 0 \end{cases}$$

Pour pouvoir résoudre le problème en base réduite efficacement, nous devons comme toujours supposer que  $f_\mu$  et  $h_\mu$  dépendent affinement de  $\mu$ . C'est-à-dire qu'il est possible de les décomposer, directement ou via l'EIM, de la façon suivante :

$$f_\mu = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k \quad h_\mu = \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k$$

### 5.3 Linéarisation des déformations affines

Supposons que la déformation du domaine  $T_\mu^{-1}$  soit affine, par conséquent  $T_\mu$  est elle aussi affine. Nous pouvons alors l'écrire de la façon suivante, soit  $X \in \Omega_\mu$  :

$$T_\mu(X) = M_\mu^{-1}X + N_\mu$$

Avec  $M_\mu \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $N_\mu \in \mathbb{R}^2$ . Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} J_{T_\mu^{-1}}(X) &= M_\mu = \begin{pmatrix} m_{1,1}(\mu) & m_{1,2}(\mu) \\ m_{2,1}(\mu) & m_{2,2}(\mu) \end{pmatrix} \\ J_{T_\mu^{-1}}(X)(J_{T_\mu^{-1}}(X))^t &= M_\mu M_\mu^t \\ &= \begin{pmatrix} m_{1,1}^2 + m_{1,2}^2 & m_{1,1}m_{2,1} + m_{1,2}m_{2,2} \\ m_{1,1}m_{2,1} + m_{1,2}m_{2,2} & m_{2,1}^2 + m_{2,2}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1(\mu) & h_2(\mu) \\ h_2(\mu) & h_3(\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il apparaît assez clairement que les matrices  $J_{T_\mu^{-1}}$  et  $J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t$  se décomposent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} J_{T_\mu^{-1}} &= m_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{2,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) M_k \quad (\text{avec ré-indicesage}) \\ J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t &= h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) H_l \end{aligned}$$

L'important dans ces décompositions est que les matrices ne dépendent pas de  $\mu$ . Nous avons aussi :

$$|J_{T_\mu}| = \frac{1}{|J_{T_\mu^{-1}}|} = \frac{1}{|m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}|} = d(\mu)$$

$$\left\| J_{T_\mu^{-1}}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} = D(\mu)$$

Nous ré-utilisons toutes ces expressions dans nos différentes formes :

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : (J_{T_\mu^{-1}} J_{T_\mu^{-1}}^t) |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : \left( \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) H_l \right) d(\mu) d\hat{X} \\ &= \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) d(\mu) \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{u})^t \hat{\nabla} \hat{v} \right) : H_l d\hat{X} \\ &= \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) \hat{a}_l(\hat{u}, \hat{v}) \\ \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (J_{T_\mu^{-1}}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} \left( \left( \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) M_k \right) \hat{\nabla} \right) \cdot \hat{v} d(\mu) d\hat{X} \\ &= \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (M_k \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} d\hat{X} \\ &= \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{p}, \hat{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\ &\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} \hat{h}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \left\| J_{T_\mu^{-1}}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} d\hat{S} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \left( \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k \right) \cdot \hat{v} d(\mu) d\hat{X} \\ &\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} \left( \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k \right) \cdot \hat{v} d(\mu) D(\mu) d\hat{S} \\ &= \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(\hat{v}) \quad (\text{avec ré-indicesage}) \end{aligned}$$

Comme pour l'exemple de chaleur nous obtenons à présent des formes bilinéaires et linéaire indépendantes de  $\mu$ .

## 5.4 Problème en base réduite

Comme pour les parties précédentes, nous commençons par nous doter d'un échantillon  $S = \{\mu_p\}_{p=1}^P$  de  $P$  valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$  toutes distinctes, nous avons alors la famille  $\{w_{1,p}, w_{2,p}, s_p\}_{p=1}^P$  de solutions associées, telles que  $w_{1,p} = \hat{u}_1(\mu_p)$ ,  $w_{2,p} = \hat{u}_2(\mu_p)$  et  $s_p = \hat{p}(\mu_p)$ . Or, pour chaque  $\mu_p$  considéré, nous avons que  $\{w_{1,p}, w_{2,p}, s_p\} \in \hat{V}_\delta \times \hat{Q}_\delta$ , nous pouvons en déduire :

$$\hat{V}_P \times \hat{Q}_P := \text{Vect}(\{w_{1,p}, w_{2,p}\}_{p=1}^P) \times \text{Vect}(\{s_p\}_{p=1}^P) \subset \hat{V}_\delta \times \hat{Q}_\delta$$

En supposant que  $\hat{V}_P \times \hat{Q}_P$  réalise une bonne approximation de  $\hat{V}_\delta \times \hat{Q}_\delta$ , nous pouvons ré-écrire notre problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}_p, \hat{p}_p) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p : \\ \hat{a}(\hat{u}_p, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}_p, \hat{v}; \mu) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}_p; \mu) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

### 5.4.1 Approche classique

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $\hat{u}_p \in \hat{V}_p$  et  $\hat{p}_p \in \hat{Q}_p$ , il existe des vecteurs  $U_p(\mu)$  et  $F_p(\mu)$  de  $\mathbb{R}^P$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{1,p} \\ \hat{u}_{2,p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \begin{pmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_p = \sum_{i=1}^P F_p^i(\mu) s_i$$

En injectant ces décompositions dans les formes variationnelles (29) et en prenant  $\hat{v} = w_j$  et  $\hat{q} = s_j$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) \hat{a}_l(\hat{u}_p, \hat{v}) + F_p^i(\mu) \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{p}_p, \hat{v}) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(\hat{v}) \\ \sum_{i=1}^P U_p^i(\mu) \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{q}, \hat{u}_p) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) A_l & \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) B_k \\ \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) B_k^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p(\mu) \\ F_p(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) F_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec les matrices  $A_l$ ,  $B_k$  et les vecteurs  $F_k$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} (A_l)_{i,j} &= \hat{a}_l(w_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq l \leq 3 \\ (B_k)_{i,j} &= \hat{b}_k(s_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq k \leq 4 \\ (F_k)_i &= \hat{f}_k(w_i) & 1 \leq i \leq P & \quad 1 \leq k \leq N_{fh} \end{aligned}$$

Dans ces expressions, nous remarquons que chacune des matrices  $\{A_l\}_{l=1}^3$  et  $\{B_k\}_{k=1}^4$  et chacun des vecteurs  $F_k$  sont indépendants de  $\mu$  et peuvent donc être pré-calculés dans la partie *offline*. Après assemblage nous obtenons ici un système de dimension  $2P$ . La résolution de ce système nous permet d'obtenir à la fois une décomposition  $U_p$  de la vitesse dans  $\hat{V}_P$  et une décomposition  $F_p$  de la pression dans  $\hat{Q}_P$ . Cependant nous pouvons faire la même remarque que dans la partie (4.3.1) concernant le nombre d'éléments dans la base réduite en vitesse.

### 5.4.2 Approche monolithique

Avec le même échantillon  $S$  et la même famille  $\{w_{1,i}, w_{2,i}, s_i\}_{i=1}^P$  de solutions associées telles que décrites pour l'approche classique. Nous avons toujours que :

$$\hat{V}_p \times \hat{Q}_p := \text{Vect}(\{w_{1,i}, w_{2,i}\}_{i=1}^P) \times \text{Vect}(\{s_i\}_{i=1}^P) \subset \hat{V}_\delta \times \hat{Q}_\delta$$

En reprenant la formulation variationnelle (29), nous avons :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}_p, \hat{p}_p) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p : \\ \hat{a}(\hat{u}_p, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}_p, \hat{v}; \mu) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}_p; \mu) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}_p, \hat{p}_p) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p : \\ \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) \hat{a}_l(\hat{u}_p, \hat{v}) + \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{p}_p, \hat{v}) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(\hat{v}) \\ \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{q}, \hat{u}_p) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}_p, \hat{p}_p) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p : \\ \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) \hat{a}_l(\hat{u}_p, \hat{v}) + \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) (\hat{b}_k(\hat{p}_p, \hat{v}) - \hat{b}_k(\hat{q}, \hat{u}_p)) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(\hat{v}) \end{cases}$$

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $(u_p(\mu), p_p(\mu)) \in V_p \times Q_p$ , il existe un vecteur  $\alpha_p(\mu)$  tel que :

$$(u_p(\mu), p_p(\mu)) = \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) (w_i, s_i) \quad \alpha_p(\mu) \in \mathbb{R}^P$$

en prenant  $v = w_j$  et  $q = s_j$ ,  $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) w_i, w_j \right) + b \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) s_i, w_j \right) \\ & - b \left( s_j, \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) w_i \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^P \alpha_p^i(\mu) \left( \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) \hat{a}_l(w_i, w_j) + \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) (\hat{b}_k(s_i, w_j) - \hat{b}_k(s_j, w_i)) \right) = \\ & \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(w_j) \end{aligned}$$

$$\boxed{\left( \sum_{l=1}^3 h_l(\mu) A_l + \sum_{k=1}^4 m_k(\mu) (B_k^t - B_k) \right) \alpha_p(\mu) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) F_k} \quad (30)$$

Avec les matrices  $A_l$ ,  $B_k$  et les vecteurs  $F_k$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} (A_l)_{i,j} &= \hat{a}_l(w_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq l \leq 3 \\ (B_k)_{i,j} &= \hat{b}_k(s_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq k \leq 4 \\ (F_k)_i &= \hat{f}(w_i) & 1 \leq i \leq P & \quad 1 \leq k \leq N_{fh} \end{aligned}$$

Nous avons toujours des matrices  $A_l$ ,  $B_k$  et des vecteurs  $F_k$  indépendants de  $\mu$ , ils peuvent donc être pré-calculés. Ainsi, pour une nouvelle valeur de  $\mu$ , il suffit d'évaluer les  $h_l(\mu)$  et les  $m_k(\mu)$  puis d'assembler le système. Une fois le système (de taille  $P$ ) résolu, nous obtenons la décomposition  $\Sigma(\mu)$  de la solution dans la base réduite  $V_P \times Q_P$ .



## 5.5 Linéarisation des déformations non-affines

Supposons à présent que la déformation du domaine  $T_\mu^{-1}$  n'est pas affine, par conséquent  $T_\mu$  n'a pas raison de l'être non plus. Plus généralement, supposons que sa jacobienne n'admette pas de décomposition de type :

$$J_{T_\mu^{-1}} = \sum_{k=1}^{N_J} m_k(\mu) M_k(X)$$

Nous souhaitons tout de même utiliser les bases réduites. Pour cela, nous allons utiliser l'EIM afin de construire des approximations linéaires de nos matrices d'intérêt.

Commençons en notant :

$$|J_{T_\mu}(X)| = d(X; \mu)$$

$$\left\| J_{T_\mu}^t(X) \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} = D(X; \mu)$$

Puisque  $T_\mu$  n'est pas affine, son déterminant ne sera généralement pas à variables séparées. Nous devons donc l'insérer dans les expressions des matrices.

Nous notons la jacobienne de  $T_\mu^{-1}$  de la façon suivante :

$$J_{T_\mu^{-1}}(X) = d(X; \mu) \begin{pmatrix} m_1(X, \mu) & m_2(X, \mu) \\ m_3(X, \mu) & m_4(X, \mu) \end{pmatrix}$$

En utilisant l'EIM sur chacune des fonctions de cette matrice, nous obtenons l'expression suivante :

$$J_{T_\mu^{-1}}(X) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_1} \nu_i^1(X) \varphi_i^1(\mu) & \sum_{i=1}^{N_2} \nu_i^2(X) \varphi_i^2(\mu) \\ \sum_{i=1}^{N_3} \nu_i^3(X) \varphi_i^3(\mu) & \sum_{i=1}^{N_4} \nu_i^4(X) \varphi_i^4(\mu) \end{pmatrix}$$

Notons qu'en général, chaque fonction  $m_i$  va nécessiter un certain nombre de fonctions  $N_i$ ,  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , différent pour être correctement approchée. Le nombre de fonctions dépendant de la régularité des  $m_i$ , si une des fonction est très chaotique, son  $N_i$  peut être élevé. Ceci va alors se répercuter sur le  $\mu$ -assemblage et donc sur le temps de calculs. L'EIM permet de contourner une difficulté, mais a néanmoins un coût.

Passons maintenant à la décomposition de  $J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})$ . Nous ne pouvons pas réutiliser les décompositions des  $\{m_i\}_{i=1}^4$  établies pour la jacobienne, nous sommes obligé de réutiliser l'EIM. Notons  $J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})$  de la façon suivante :

$$J_{T_\mu^{-1}}(X)(J_{T_\mu^{-1}}(X))^t = d(X; \mu) \begin{pmatrix} m_{1,1}^2 + m_{1,2}^2 & m_{1,1}m_{2,1} + m_{1,2}m_{2,2} \\ m_{1,1}m_{2,1} + m_{1,2}m_{2,2} & m_{2,1}^2 + m_{2,2}^2 \end{pmatrix}$$

$$= d(X; \mu) \begin{pmatrix} h_1(X, \mu) & h_2(X, \mu) \\ h_2(X, \mu) & h_3(X, \mu) \end{pmatrix}$$

L'avantage de cette matrice est qu'elle est symétrique par construction. Ainsi, nous aurons une EIM de moins à effectuer. En utilisant l'EIM sur chacune des fonctions de cette matrice, nous obtenons l'expression suivante :

$$J_{T_\mu^{-1}}(X)(J_{T_\mu^{-1}}(X))^t = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_1} \chi_i^1(X) \xi_i^1(\mu) & \sum_{i=1}^{N_2} \chi_i^2(X) \xi_i^2(\mu) \\ \sum_{i=1}^{N_2} \chi_i^2(X) \xi_i^2(\mu) & \sum_{i=1}^{N_3} \chi_i^3(X) \xi_i^3(\mu) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons faire la même remarque que pour la jacobienne concernant les  $N_i$ ,  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . Là aussi la régularité des fonctions  $\{h_i\}_{i=1}^3$  va jouer un rôle important.

Cependant, une fois ces deux matrices décomposées, nous pouvons les réécrire dans la forme qui nous intéresse, à savoir :

$$\begin{aligned}
J_{T_\mu^{-1}} &= d(X, \mu) \left( m_1(X, \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_2(X, \mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + m_3(X, \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_4(X, \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_1} \nu_i^1(X) \varphi_i^1(\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_2} \nu_i^2(X) \varphi_i^2(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_3} \nu_i^3(X) \varphi_i^3(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_4} \nu_i^4(X) \varphi_i^4(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{\sum N_i} \varphi_k(\mu) M_k(X) \quad (\text{avec ré-indicesage})
\end{aligned}$$

Et de la même façon pour la seconde matrice :

$$\begin{aligned}
J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t &= d(X, \mu) \left( h_1(X, \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + h_2(X, \mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + h_3(X, \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_1} \chi_i^1(X) \xi_i^1(\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_2} \chi_i^2(X) \xi_i^2(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_3} \chi_i^3(X) \xi_i^3(\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{l=1}^{\sum N_i} \xi_l(\mu) H_l(X)
\end{aligned}$$

Notons finalement,  $N_m = \sum_{i=1}^4 N_i$  pour la jacobienne et  $N_h = \sum_{i=1}^3 N_i$  pour la seconde. Nous avons donc :

$$J_{T_\mu^{-1}} = \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k(\mu) M_k(X) \quad J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t = \sum_{l=1}^{N_h} \xi_l(\mu) H_l(X)$$

Comme pour la partie affine, l'important à ce stade est que les matrices ne dépendent pas de  $\mu$ .

Nous ré-utilisons toutes ces expressions dans nos différentes formes :

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : (J_{T_\mu^{-1}} J_{T_\mu}^t) |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : \left( \sum_{l=1}^{N_h} \xi_l(\mu) H_l(X) \right) d\hat{X} \\
&= \sum_{l=1}^{N_h} \xi_l(\mu) \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : H_l(X) d\hat{X} \\
&= \sum_{l=1}^{N_h} \xi_l(\mu) \hat{a}_l(\hat{u}, \hat{v})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (J_{T_\mu^{-1}}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} \left( \left( \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k(\mu) M_k(X) \right) \hat{\nabla} \right) \cdot \hat{v} d\hat{X} \\
&= \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k(\mu) \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (M_k(X) \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} d\hat{X} \\
&= \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k(\mu) \hat{b}_k(\hat{p}, \hat{v})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} \hat{h}_\mu \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \left\| J_{T_\mu^{-1}}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} d\hat{S} \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \left( \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k \right) \cdot \hat{v} D(X; \mu) d\hat{X} \\
&\quad + \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}} \left( \sum_{k=1}^{N_h} \theta_k^h(\mu) h_k \right) \cdot \hat{v} D(X; \mu) d\hat{S} \\
&= \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) \hat{f}_k(\hat{v}) \quad (\text{avec ré-indices})
\end{aligned}$$

Pour que  $\hat{f}(\cdot; \mu)$  admette une décomposition, il faut aussi que  $D(\cdot; \mu)$  en admette une. Encore une fois, il est possible d'utiliser l'EIM pour trouver une décomposition.

Nous aboutissons finalement à des combinaisons linéaires de formes indépendantes de  $\mu$ . Le reste de la méthode va alors être totalement similaire au cas affine, avec toujours deux approches (classique et monolithique).

## 5.6 Exemples

### 5.6.1 Exemple de la sténose

Afin d'illustrer la méthode des bases réduites sur une géométrie paramétrée, nous proposons un exemple qui permet de modéliser une sténose. Cet exemple est tiré de l'article [5]. Nous avons alors, pour  $\mu \in \mathcal{D} := [-0.8, 0.8]$  :

$$T_\mu : \quad \Omega_\mu \longrightarrow \hat{\Omega} \\ (x, y) \longrightarrow (x, (1 + \mu \sin(2\pi x))y)$$

$$T_\mu^{-1} : \quad \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega_\mu \\ (\hat{x}, \hat{y}) \longrightarrow \left( \hat{x}, \frac{1}{1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})} \hat{y} \right)$$

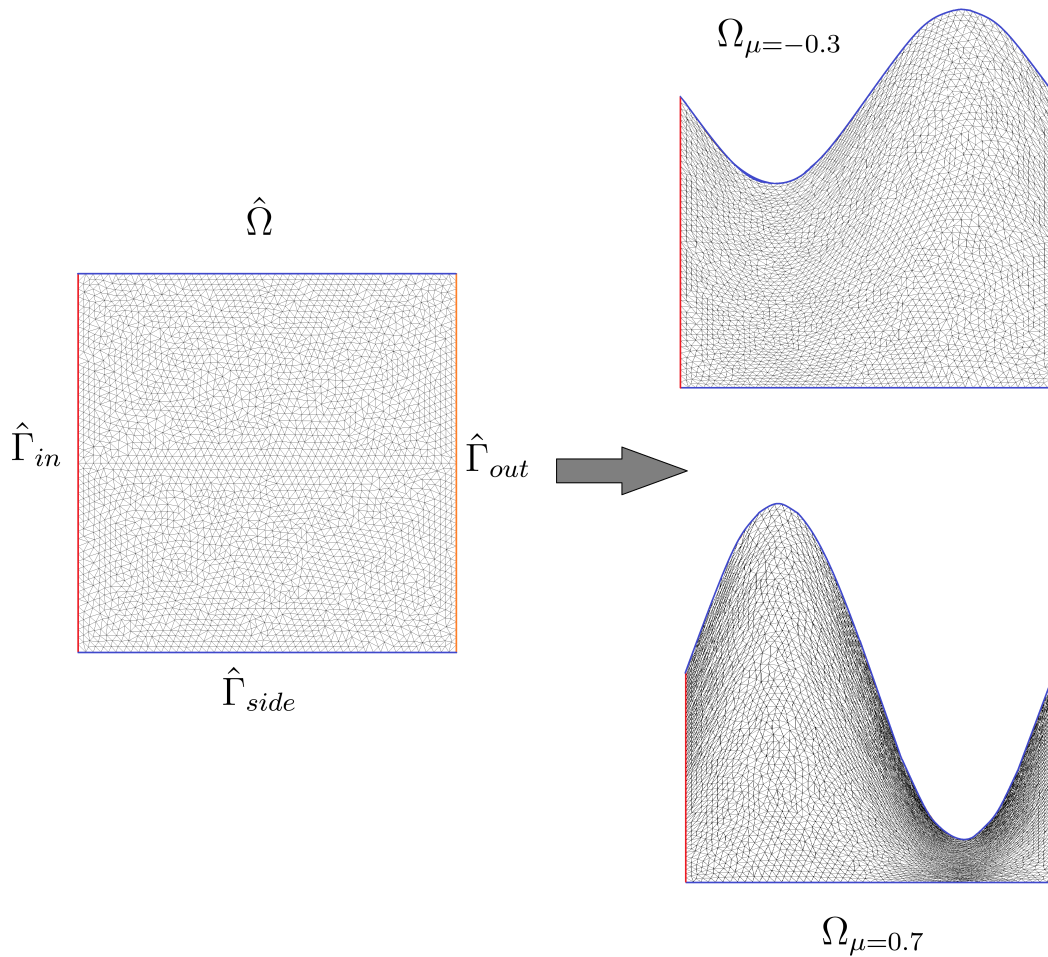


FIGURE 12 – Exemples de déformation

Nous notons donc  $\hat{\Omega} := ]0, 1[ \times ]0, 1[$  le domaine de référence, l'application  $T_\mu^{-1}$  permet de déformer ce domaine de référence et  $T_\mu$  permet de «redresser»  $\Omega_\mu$ .

Partant de cela, nous introduisons le problème :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega_\mu \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega_\mu \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Side,\mu} \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sur } \Gamma_{in,\mu} \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{out,\mu} \end{cases}$$

Comme détaillé précédemment, nous avons le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (q, v) \in V \times Q : \\ a(u, v; \mu) + b(p, v; \mu) = f(v; \mu) \\ b(q, u; \mu) = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} \nu \nabla u : \nabla v \, dX \\ b(p, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu} p \nabla \cdot v \, dX \\ f(v; \mu) &= \int_{\Gamma_{in,\mu}} v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dS \end{aligned}$$

Nous connaissons  $T_\mu$ , nous pouvons donc calculer  $J_{T_\mu^{-1}}$  et  $J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t$  :

$$\begin{aligned} J_{T_\mu^{-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi\mu \cos(2\pi\hat{x})}{(1+\mu \sin(2\pi\hat{x}))^2} \hat{y} & \frac{1}{1+\mu \sin(2\pi\hat{x})} \end{pmatrix} \\ J_{T_\mu^{-1}}(J_{T_\mu^{-1}})^t &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi\mu \cos(2\pi\hat{x})}{(1+\mu \sin(2\pi\hat{x}))^2} \hat{y} \\ -\frac{2\pi\mu \cos(2\pi\hat{x})}{(1+\mu \sin(2\pi\hat{x}))^2} \hat{y} & \left( \frac{2\pi\mu \cos(2\pi\hat{x})}{(1+\mu \sin(2\pi\hat{x}))^2} \hat{y} \right)^2 + \left( \frac{1}{1+\mu \sin(2\pi\hat{x})} \right)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus :

$$\det(J_{T_\mu}) = 1 + \mu \sin(2\pi x) \quad \text{et} \quad \hat{y} = (1 + \mu \sin(2\pi x))y$$

Nous utilisons alors ces calculs pour trouver les formes sur le domaine de référence :

$$\begin{aligned}
a(u, v; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : (J_{T_\mu^{-1}} J_{T_\mu}^t) |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \nu (1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{x}} \right) \\
&\quad - \nu 2\pi \mu \cos(2\pi \hat{x}) \hat{y} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{x}} \right) \\
&\quad + \nu \left( \frac{1 + 4\pi^2 \mu^2 \cos^2(2\pi \hat{x}) \hat{y}^2}{1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} \right) d\hat{X} \\
&= \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(p, v; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (J_{T_\mu^{-1}}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})) \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} - \hat{p} (2\pi \hat{y} \mu \cos(2\pi \hat{x})) \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \hat{p} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} d\hat{X} \\
&= \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v; \mu) &= \int_{\Gamma_{in, \mu}} v \cdot (1, 0)^t dS \\
&= \int_{\hat{\Gamma}_{in, \mu}} \hat{v} \cdot (1, 0)^t d\hat{S} \\
&= \hat{f}(\hat{v}; \mu)
\end{aligned}$$

Le problème devient donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}, \hat{p}) \in \hat{V} \times \hat{Q} \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V} \times \hat{Q} : \\ \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}; \mu) = 0 \end{cases}$$

Nous posons ensuite :

$$h_{(1, \mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = 1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})$$

$$h_{(2, \mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = 2\pi \mu \cos(2\pi \hat{x}) \hat{y}$$

$$h_{(3, \mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1 + 4\pi^2 \mu^2 \cos^2(2\pi \hat{x}) \hat{y}^2}{1 + \mu \sin(2\pi \hat{x})}$$

remarquons que  $h_1$  et  $h_2$  se décomposent affinement par rapport à  $\mu$ , mais pas  $h_3$  pour laquelle nous devons utiliser l'EIM. En utilisant cela (cf. partie (1.3.2)), nous obtenons des décompositions des formes  $h_{(1, \mu)}$ ,  $h_{(2, \mu)}$  et  $h_{(3, \mu)}$  en respectivement 2, 1 et 16 fonctions indépendantes de  $\mu$ , soit :

$$h_{(1, \mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i_1=1}^2 \theta_1^{i_1}(\mu) h_1^{i_1}(\hat{x}, \hat{y}) \quad h_{(2, \mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i_2=1}^1 \theta_2^{i_2}(\mu) h_2^{i_2}(\hat{x}, \hat{y})$$

$$h_{(3,\mu)}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i_3=1}^{16} \theta_3^{i_3}(\mu) h_3^{i_3}(\hat{x}, \hat{y})$$

En utilisant ce que nous avons développé dans la partie (5.5), nous obtenons :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) = \sum_{i_1=1}^2 \theta_1^{i_1}(\mu) a^{(1,i_1)}(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{i_2=1}^1 \theta_2^{i_2}(\mu) a^{(2,i_2)}(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{i_3=1}^{16} \theta_3^{i_3}(\mu) a^{(3,i_3)}(\hat{u}, \hat{v})$$

Avec, pour  $i_1 \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ ,  $i_2 = 1$  et  $i_3 \in \llbracket 1, 16 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} a^{1,i_1}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} h_1^{i_1}(\hat{x}, \hat{y}) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{x}} \right) d\hat{X} \\ a^{2,i_2}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} h_2^{i_2}(\hat{x}, \hat{y}) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{x}} \right) d\hat{X} \\ a^{3,i_3}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} h_3^{i_3}(\hat{x}, \hat{y}) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} \right) d\hat{X} \end{aligned}$$

en utilisant un ré-indicesage approprié, nous avons :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) = \sum_{i=1}^{19} \theta^i(\mu) a^i(\hat{u}, \hat{v})$$

Nous faisons de même avec la forme  $\hat{b}$ , nous avons :

$$\hat{b}(\hat{u}, \hat{v} : \mu) = \sum_{i_1=1}^2 \theta_1^{i_1}(\mu) b^{1,i_1}(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{i_2=1}^1 \theta_2^{i_2}(\mu) b^{2,i_2}(\hat{u}, \hat{v}) + b^3(\hat{u}, \hat{v})$$

Avec :

$$\begin{aligned} b^{1,i_1}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} h_1^{i_1}(\hat{x}, \hat{y}) \hat{p} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{x}} d\hat{X} \\ b^{2,i_2}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} h_2^{i_2}(\hat{x}, \hat{y}) \hat{p} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} d\hat{X} \\ b^3(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} d\hat{X} \end{aligned}$$

Et finalement avec ré-indicesage :

$$\hat{b}(\hat{u}, \hat{v} : \mu) = \sum_{i=1}^4 \theta^i(\mu) b^i(\hat{u}, \hat{v})$$

Nous pouvons à présent utiliser l'algorithme glouton afin de construire une base réduite pour le problème. Nous choisissons d'utiliser un seuil  $\varepsilon = 10^{-6}$ , nous obtenons alors une base comportant 40 éléments. Ci-dessous nous représentons les valeurs de  $\mu$  retenues dans l'échantillon ainsi que l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'éléments.

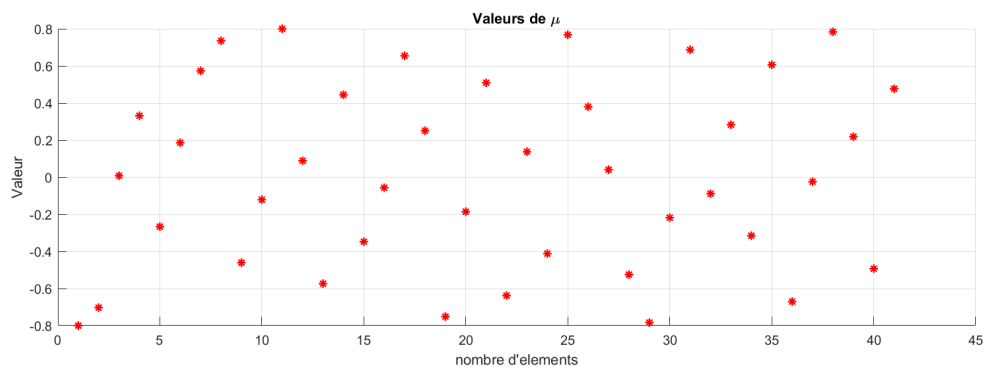


FIGURE 13 – Valeurs prises par  $\mu$

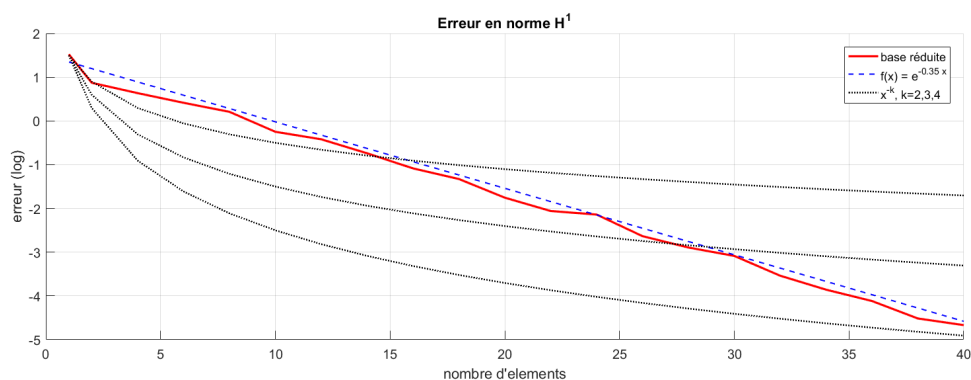


FIGURE 14 – Évolution de l'erreur en norme  $H^1$

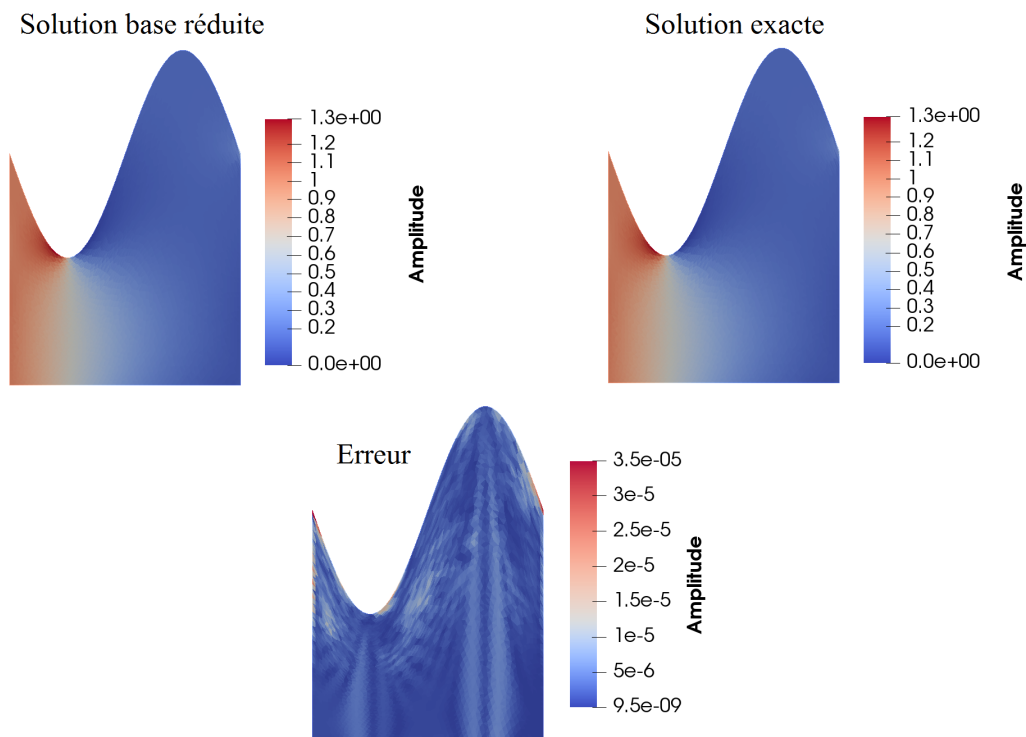
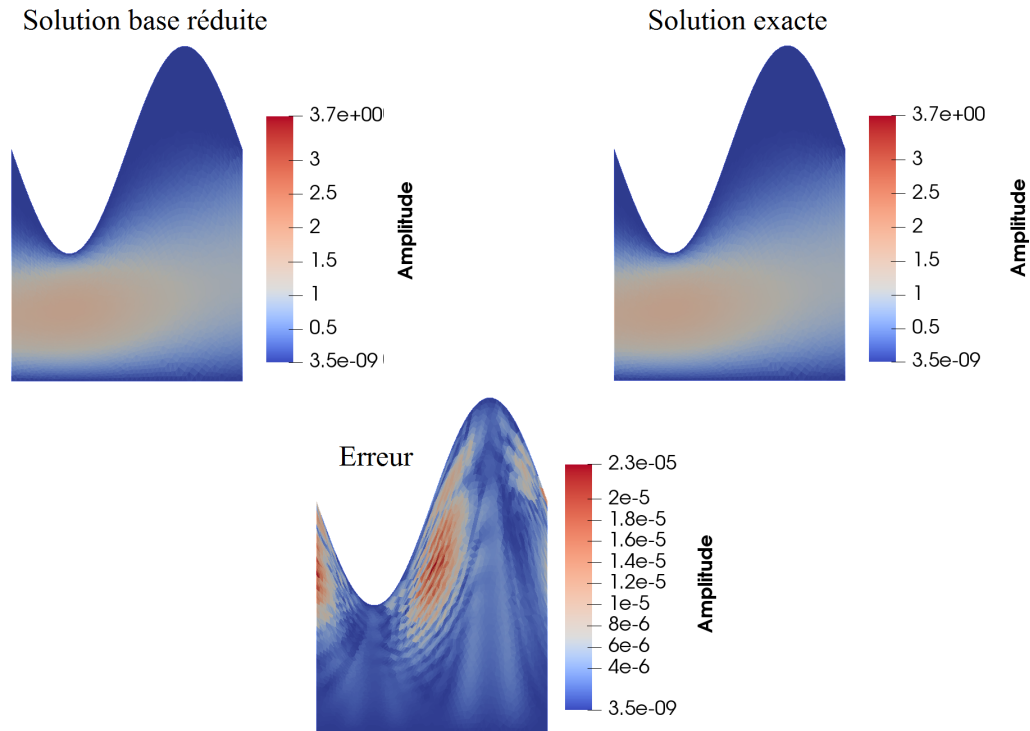
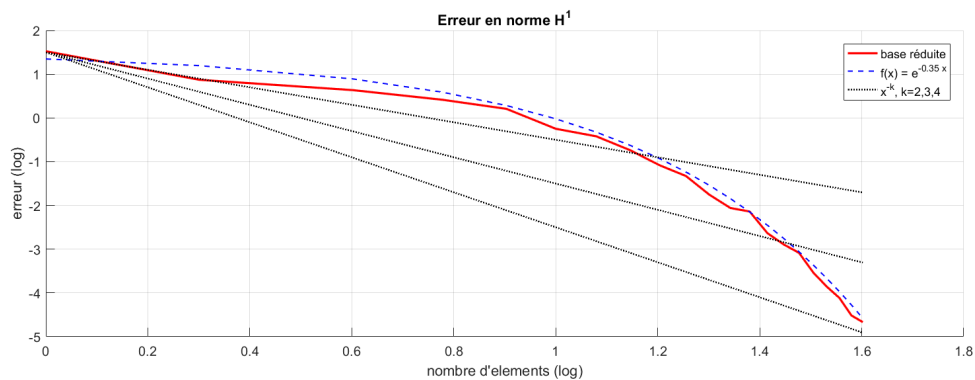


FIGURE 15 – Affichage de la pression  $\mu = -0.45$



FIGURE 16 – Affichage de la vitesse  $\mu = -0.45$ 

Comme nous pouvons le constater sur la courbe de la figure 14, en utilisant cet algorithme l'erreur est strictement décroissante et sa convergence est exponentielle. Nous illustrons aussi la courbe  $f(x) = e^{-0.35x+\tau}$  qui semble très bien approcher la courbe d'erreur de la méthode. Afin d'illustrer le bon fonctionnement de la base réduite nous avons affiché une solution EF ( $u_\delta(\mu), p_\delta(\mu)$ ), la solution BR associée ( $u_p(\mu), p_p(\mu)$ ), ainsi que leur différence, pour une valeur de  $\mu \in \mathcal{D}$ .

FIGURE 17 – Évolution de l'erreur en  $\log\text{-}\log$ 

Finalement nous affichons l'évolution de l'erreur avec le nombre d'éléments en  $\log$ , de cette façon nous pouvons encore mieux rendre compte de la convergence exponentielle de la méthode.

### 5.6.2 Exemple de la bifurcation à géométrie paramétrée

Maintenant que nous avons mis en évidence le bon fonctionnement de la méthode base réduite à travers un premier exemple, nous souhaitons aller plus loin en nous intéressant à une bifurcation à géométrie variable. Notre exemple présente une bifurcation à une entrée et trois sorties, nous souhaitons paramétrer la largeur des sorties. Nous posons  $\mathcal{D} := [0.1, 0.9] \times [0.1, 0.9]$ , nous avons donc que  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ . Nous introduisons ensuite  $\mathcal{T}_\delta$  le maillage du domaine  $\hat{\Omega}$  de référence. Sur ce maillage nous notons 9 sous-domaines  $\{\hat{\Omega}^i\}_{i=1}^9$ . Puis nous introduisons finalement l'application de déformation du domaine :

$$T_\mu : \quad \Omega_\mu \longrightarrow \hat{\Omega} \\ (x, y) \longrightarrow (T_{\mu,x}^i(x, y), T_{\mu,y}^i(x, y)) \quad \text{si } (x, y) \in \Omega^i, \forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$$

$$T_\mu^{-1} : \quad \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega_\mu \\ (\hat{x}, \hat{y}) \longrightarrow (T_{\mu,\hat{x}}^{i,-1}(\hat{x}, \hat{y}), T_{\mu,\hat{y}}^{i,-1}(\hat{x}, \hat{y})) \quad \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}^i, \forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$$

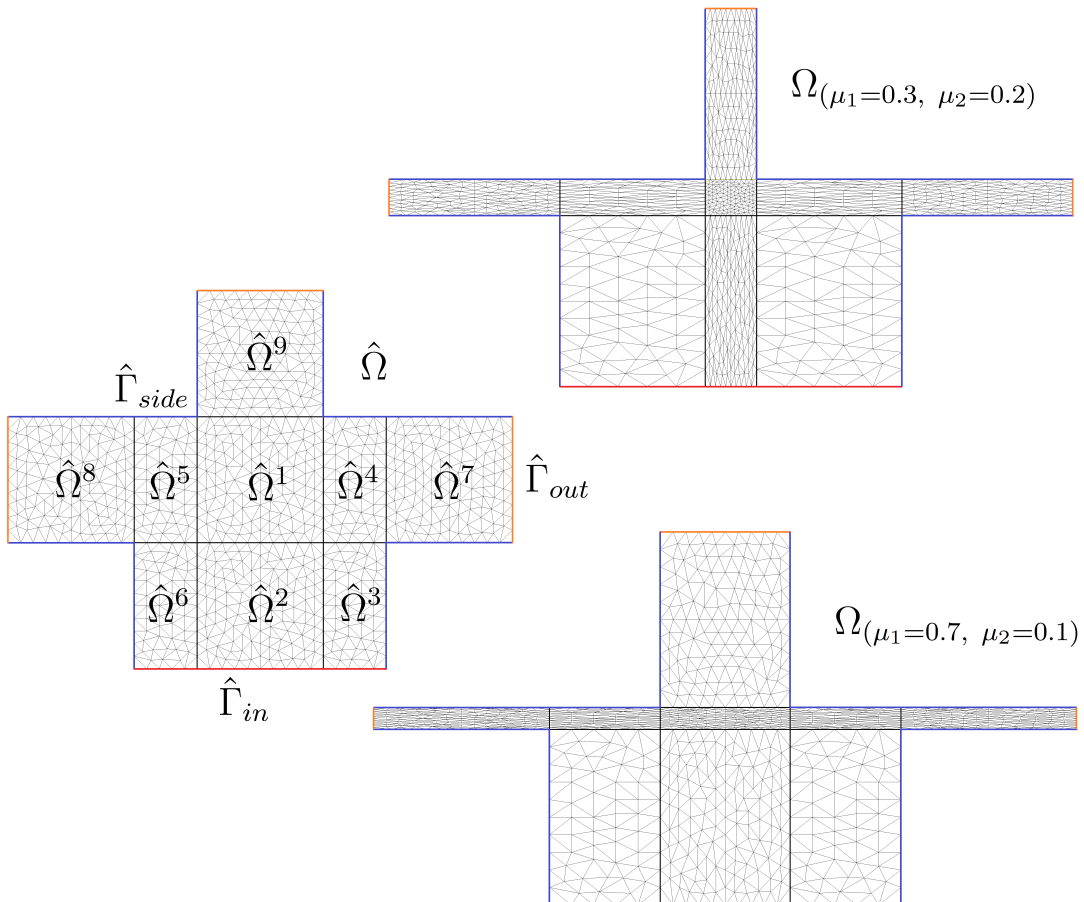


FIGURE 18 – Exemples de déformation

Nous avons alors la liste des déformations sur chacun des sous-domaine :

$i$	$T_\mu^{i,-1} : \Omega_\mu^i \longrightarrow \hat{\Omega}^i$	$T_\mu^i : \hat{\Omega}_\mu^i \longrightarrow \Omega^i$
1	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \mu_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 - 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 - 1 \\ 1 - \mu_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 - \mu_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1 - \mu_1}{2 - \mu_1} \\ \mu_2 - 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 - \mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1 - \mu_1}{2 - \mu_1} \\ 0 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 - \mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1 - \mu_1}{2 - \mu_1} \\ 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 - 1 \\ 1 - \mu_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 - \mu_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1 - \mu_1}{2 - \mu_1} \\ \mu_2 - 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \mu_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 - 1 \end{pmatrix}$

Nous remarquons que dans cet exemple toutes les déformation proposées sont affines. Il est donc très rapide de trouver les  $J_{T_\mu^{i,-1}}^t$ , il suffit en effet de prendre directement les matrices des applications réciproques. De plus il est possible de grouper certains domaines par deux lorsqu'ils présentent la même déformation. Ainsi nous pouvons réduire notre domaine  $\hat{\Omega}$  à 5 groupes : ( $G^1 = \hat{\Omega}^1$ ,  $G^2 = \hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^9$ ,  $G^3 = \hat{\Omega}^3 + \hat{\Omega}^6$ ,  $G^4 = \hat{\Omega}^4 + \hat{\Omega}^5$ ,  $G^5 = \hat{\Omega}^7 + \hat{\Omega}^8$ ).

Sur chacun de ces 5 groupes de domaines, nous utilisons ce que nous avons développé dans la partie (5.3) et comme les jacobiniennes sont diagonales, nous avons :

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : (J_{T_\mu^{-1}} J_{T_\mu^{-1}}^t) |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \int_{G^i} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : (J_{T_\mu^i} J_{T_\mu^i}^t) |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \int_{G^i} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{v})^t \hat{\nabla} \hat{u} \right) : \left( \sum_{l=1}^3 h_l^i(\mu) H_l^i \right) d^i(\mu) d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \sum_{l=1}^2 h_l^i(\mu) \hat{a}^{i,l}(\hat{u}, \hat{v}) \\
&= \sum_{i=1}^{10} \theta^i(\mu) \hat{a}^i(\hat{u}, \hat{v}) \quad (\text{avec ré-indices})
\end{aligned}$$

Et de même pour  $\hat{b}$  :

$$\begin{aligned}
\hat{b}(\hat{p}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{p} (J_{T_\mu^{-1}}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \int_{G^i} \hat{p} (J_{T_\mu^i}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \int_{G^i} \hat{p} \left( \left( \sum_{k=1}^2 m_k^i(\mu) M_k^i \right) \hat{\nabla} \right) \cdot \hat{v} d^i(\mu) d\hat{X} \\
&= \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^2 m_k^i(\mu) \hat{b}(\hat{p}, \hat{v}) \\
&= \sum_{i=1}^{10} \theta^i(\mu) \hat{b}^{i,k}(\hat{p}, \hat{v}) \quad (\text{avec ré-indices})
\end{aligned}$$

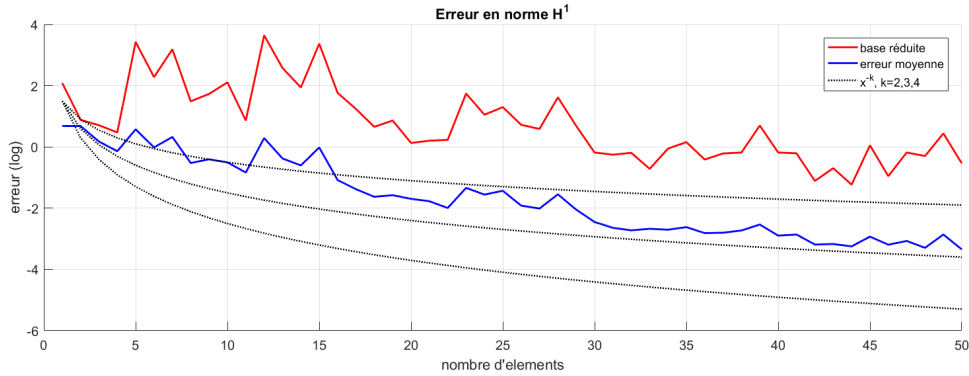
En utilisant la résolution monolithique, part. (4.3.2), nous avons donc notre problème en base réduite :

$$\left( \sum_{i=1}^{10} \theta^i(\mu) A_i + \sum_{i=1}^{10} \theta^i(\mu) (B_i^t - B_i) \right) \alpha_p(\mu) = F$$

Avec toujours  $\alpha_p \in \mathbb{R}^P$  la décomposition de la solution dans la base réduite  $\hat{V}_p \times \hat{Q}_p$  et  $A_l, B_k, F$  définis comme suit :

$$\begin{aligned}
(A_l)_{i,j} &= \hat{a}_l(w_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq l \leq 3 \\
(B_k)_{i,j} &= \hat{b}_k(s_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P & \quad 1 \leq k \leq 4 \\
(F)_j &= \hat{f}(w_j) & 1 \leq j \leq P &
\end{aligned}$$

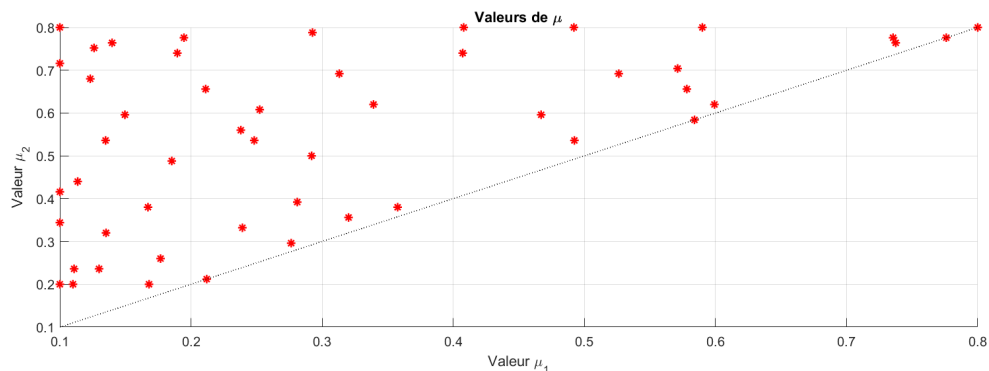
Nous utilisons alors cette formulation pour l'algorithme *glouton*, en imposant un seuil de  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Cependant cet exemple ne se plie pas aux bases réduites. En effet, même avec des base de 50 à 100 éléments, nous n'obtenons pas d'erreur inférieure à  $10^{-1}$ . Ci-dessous nous représentons l'erreur pour des bases de 1 à 50 éléments toujours construites à partir de l'algorithme *glouton*.

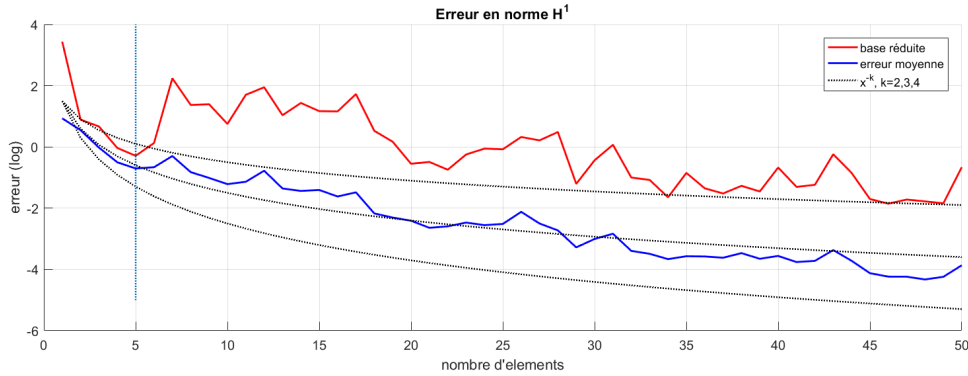
FIGURE 19 – Évolution de l'erreur en norme  $H^1$ 

Nous constatons sur ce graphique que nous n'obtenons pas de convergence réelle de l'erreur et encore moins la convergence exponentielle et strictement décroissante attendue. En plus de l'erreur en base réduite qui correspond à l'erreur maximale pour toutes les valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}_h$ , nous décidons de représenter l'erreur moyenne. Cependant, nous n'obtenons pas de résultats concluants avec l'erreur moyenne.

Nous remarquons que ce problème englobe en réalité deux comportements très distincts : Soit  $\mu_1 > \mu_2$ , c'est-à-dire que le diamètre de l'embouchure verticale est plus grand que celles horizontales, et dans ce cas le flux sort principalement par la première. Ou bien  $\mu_2 > \mu_1$  et dans ce cas, l'écoulement est inversé, i.e. sort principalement par les embouchures horizontales. La présence de deux cas de figures très différents est contraire à la logique d'une base réduite.

Nous décidons alors de restreindre la construction de la base réduite à l'un des deux cas. Nous choisissons de prendre  $\mathcal{D} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in [0.1, 0.9], \text{ tel que } \mu_1 \leq \mu_2\}$ , c'est-à-dire que l'embouchure verticale est toujours plus petite que celles horizontales. Nous appliquons alors le même algorithme *greedy* que dans le cas précédent et nous obtenons les résultats suivants :

FIGURE 20 – Valeurs prises par  $\mu$

FIGURE 21 – Évolution de l'erreur en norme  $H^1$ 

Nous pouvons alors effectuer plusieurs observations. La première chose est que nous n'obtenons toujours pas la convergence exponentielle et strictement décroissante attendue. Cependant, nous pouvons remarquer une nette amélioration quand à la première version. De plus, nous pouvons souligner un «départ» de convergence exponentielle sur les premiers éléments (mis en évidence ici par une séparation). Enfin nous remarquons que l'erreur moyenne est ici plus stable et tend à décroître rapidement (plus vite que  $x^{-2}$  et  $x^{-3}$ ) et de façon assez régulière.

Puisque l'erreur a globalement diminué lorsque que nous avons simplifié le problème, cela signifie que nous sommes sur la bonne piste et que le problème est trop irrégulier pour être approché correctement par une base réduite, même après séparation des deux comportements. Cependant dans le deuxième cas, nous avons un début de convergence qui s'arrête brusquement, signe d'un autre problème.

Effectivement, après une analyse plus poussée, nous avons remarqué que le conditionnement des matrices base réduite devenait très mauvais passé le 5<sup>ème</sup> élément, ce qui induit une erreur considérable sur la résolution du système linéaire. S'ensuit alors un effet «boule de neige», en effet supposons que  $u_\delta(\mu_0)$  soit exactement la combinaison linéaire des éléments déjà présents dans la base réduite  $V_p$  si il présente une erreur de résolution numérique, il va alors présenter une forte erreur  $\|u_p(\mu_0) - u_\delta(\mu_0)\|$ . Si cette erreur est trop forte, il va donc être ajouté à la base réduite  $V_p$ , or comme il est exactement combinaison linéaire des éléments présents précédemment, il va contribuer à détériorer le conditionnement. C'est exactement ce qu'il se passe dans notre cas, c'est pour cela que l'erreur base réduite, qui correspond à l'erreur maximale, présente des pics et peine à décroître. Tandis que l'erreur moyenne décroît assez régulièrement.

Bien que le seuil  $\varepsilon = 10^{-5}$  est loin d'être obtenu, nous proposons d'illustrer la base obtenue avec 50 éléments, pour  $\mu = (0.2, 0.5)$ .

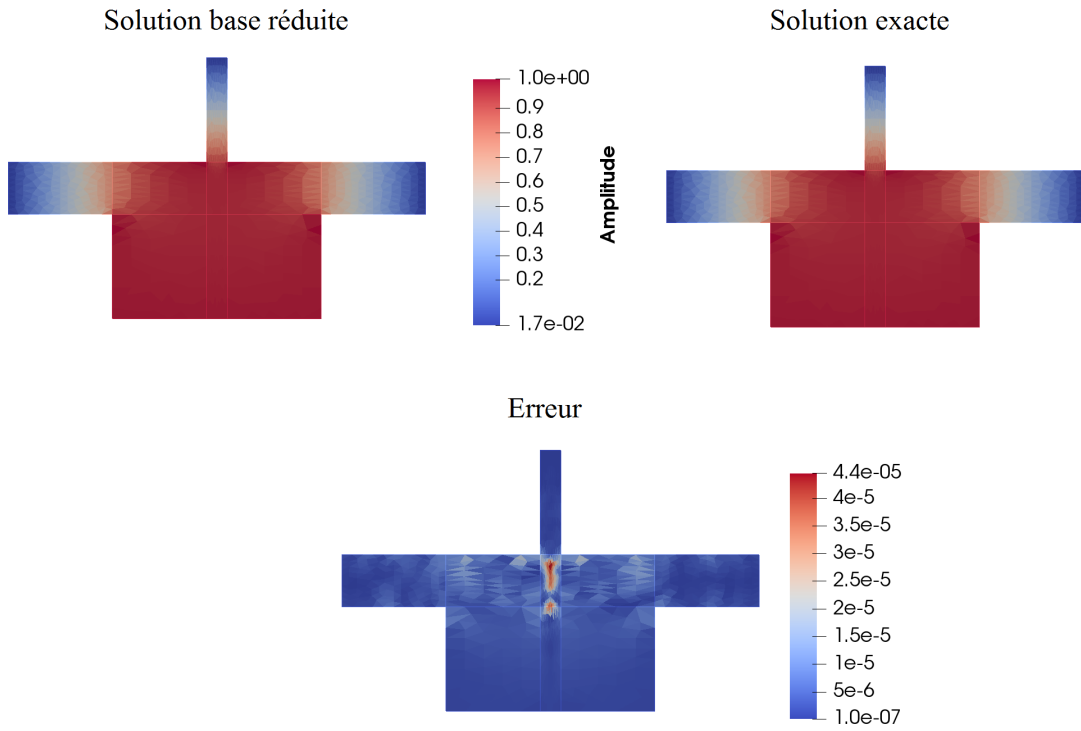


FIGURE 22 – Affichage de la pression  $\mu = (0.2, 0.5)$

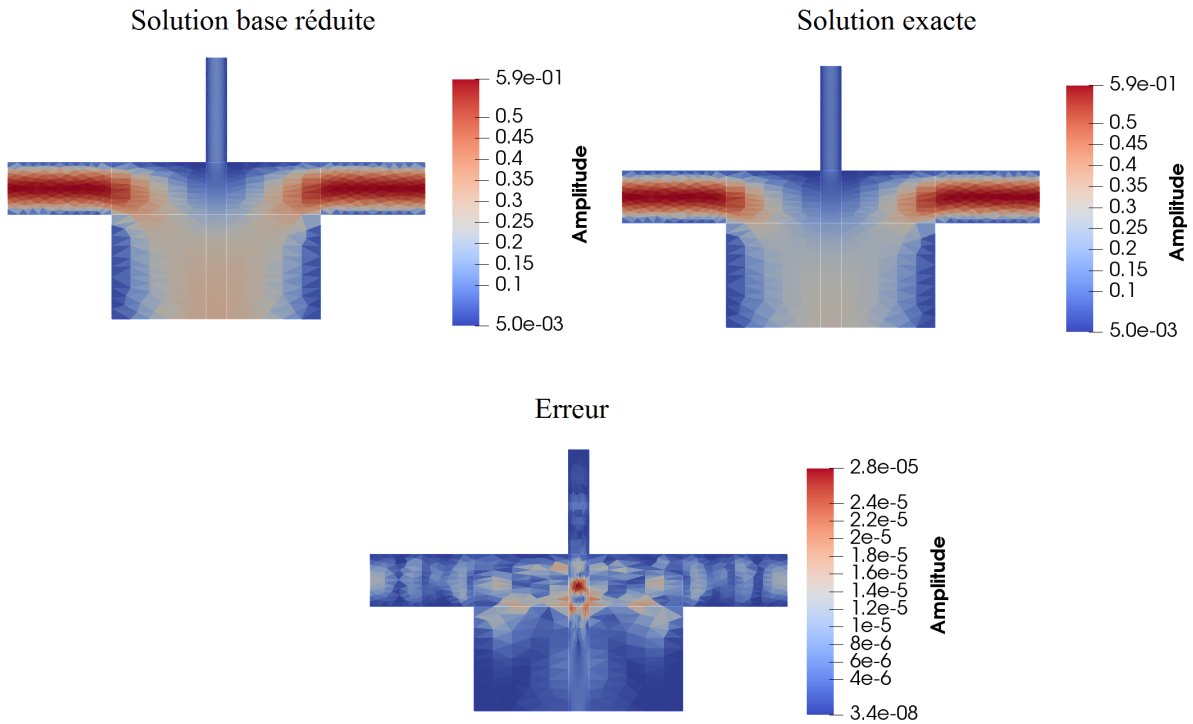
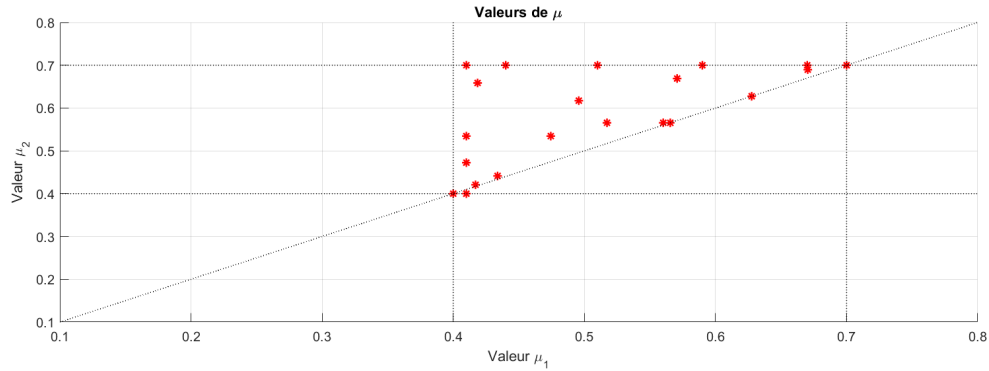
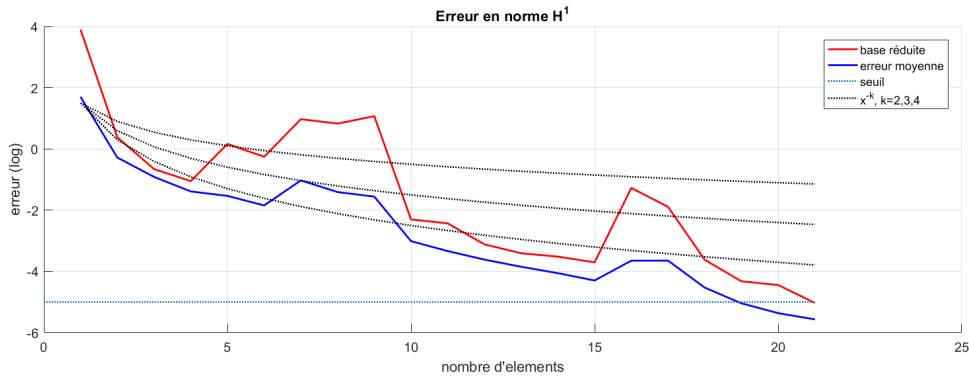


FIGURE 23 – Affichage de la vitesse  $\mu = (0.2, 0.5)$

Nous proposons alors de rendre le problème encore plus régulier afin d'obtenir une base réduite. Pour cela nous restons dans le cas  $\mu_1 \leq \mu_2$ , mais nous restreignons les valeurs prises par  $\mu_2$ . Nous posons alors :

$$\mathcal{D} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in [0.4, 0.7], \text{ tel que } \mu_1 \leq \mu_2\}$$

Nous appliquons alors l'algorithme *greedy* avec le même seuil  $\varepsilon = 10^{-5}$  et nous obtenons cette fois-ci :

FIGURE 24 – Valeurs prises par  $\mu$ FIGURE 25 – Évolution de l'erreur en norme  $H^1$ 

Cette fois-ci nous obtenons bien convergence de la méthode avec 21 éléments. Cette convergence est bien exponentielle, mais elle n'est pas strictement décroissante. Nous pouvons en fait observer des pics d'erreur qui ont la même explication que dans le cas précédent.



## 6 Équations de Stokes instationnaires

### 6.1 Présentation du problème

Nous souhaitons cette fois utiliser la méthode des bases réduites sur les équations de Stokes instationnaires. Nous posons le problème suivant :

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous cherchons  $(\tilde{u}(t, X; \mu), \tilde{p}(t, X; \mu)) \in \mathcal{C}^1([0, T], (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega))$  telles que :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\mu) : \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(\mu)}{\partial t} - \nu_\mu \Delta \tilde{u}(\mu) + \nabla \tilde{p}(\mu) = f_\mu & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \tilde{u}(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}(\mu) = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_\mu \frac{\partial \tilde{u}(\mu)}{\partial \vec{n}} - \tilde{p}(\mu) \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \tilde{u}(0, X; \mu) = \tilde{u}_0(X) & \forall X \in \Omega \\ \tilde{p}(0, X; \mu) = \tilde{p}_0(X) & \forall X \in \Omega \end{cases}$$

Avec  $\nu_\mu$  une constante positive,  $f_\mu$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ ,  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], H^{1/2}(\Omega))$  et  $h_\mu$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Gamma))^2)$ , toutes dépendantes de  $\mu$ . Nous avons choisi d'utiliser une fonction  $g$  indépendante de  $\mu$  pour garder un relèvement simple. Néanmoins il est tout à fait possible de prendre une fonction  $g_\mu$  puis d'utiliser l'EIM afin de la décomposer.

De plus, nous avons maintenant la condition de Cauchy. Puisque  $\tilde{u}(0, X; \mu) = \tilde{u}_0(X)$ ,  $\forall X \in \Omega$ , nous avons nécessairement que  $\tilde{u}_0 \in (H^1(\Omega))^2$  et de même,  $\tilde{p}_0 \in L^2(\Omega)$ . Dans cette introduction, nous nous limitons au cas où  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{p}_0$  ne dépendent pas de  $\mu$ , de cette façon nous pouvons les introduire dans le relèvement de la condition de Dirichlet.

Nous devons de nouveau traiter le cas des conditions de Dirichlet non-homogènes afin de pouvoir construire des bases réduites. Nous posons  $\mu_0 \in \mathcal{D}$  une valeur quelconque de  $\mu$  et nous posons  $\varphi_0(t, X) = u(t, X, \mu_0)$ ,  $\forall (t, X) \in [0, T] \times \Omega$ , la solution associée. Nous avons donc  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1([0, T], (H^1(\Omega))^2)$  solution du problème  $(\mathcal{R})$  suivant :

$$(\mathcal{R}) : \begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \nu_\mu \Delta \varphi_0 + \nabla \psi_0 = f_{\mu_0} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \varphi_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi_0 = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_{\mu_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} - \psi_0 \vec{n} = h_{\mu_0} & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \varphi_0(0, X; \mu) = \tilde{u}_0(X) & \forall X \in \Omega \\ \psi_0(0, X; \mu) = \tilde{p}_0(X) & \forall X \in \Omega \end{cases}$$

Nous posons ensuite  $u = \tilde{u} - \varphi_0$  et  $p = \tilde{p} - \psi_0$  pour obtenir :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial(u + \varphi_0)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= \Delta(u + \varphi_0) = \Delta u + \Delta \varphi_0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} &= \frac{\partial(u + \varphi_0)}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \tilde{u} = \nabla \cdot (u + \varphi_0) = \nabla \cdot u + \nabla \cdot \varphi_0 = \nabla \cdot u$$

$$u \cdot \vec{n} = (\tilde{u} - \varphi_0) \cdot \vec{n} = \tilde{u} \cdot \vec{n} - \varphi_0 \cdot \vec{n} = g - g = 0$$

$$u(0, X; \mu) = \tilde{u}(0, X; \mu) - \varphi_0(0, X) = 0 \quad \forall X \in \Omega$$

$$p(0, X; \mu) = \tilde{p}(0, X; \mu) - \psi_0(0, X) = 0 \quad \forall X \in \Omega$$

Ce qui nous ramène au problème :

trouver  $(u(t, X; \mu), p(t, X; \mu)) \in \mathcal{C}^1([0, T], (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega))$  solution du problème  $(\mathcal{P})$  suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu_\mu \Delta u + \nabla p = f_\mu + \Delta \varphi_0 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu_\mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ u(0, X; \mu) = 0 & \forall X \in \Omega \\ p(0, X; \mu) = 0 & \forall X \in \Omega \end{cases}$$

Avec  $\nu_\mu$  une constante positive,  $f_\mu$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Omega))^2)$  et  $h_\mu$  une fonction de  $\mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Gamma))^2)$ . Nous posons à présent les espaces  $V := \mathcal{C}^0([0, T], (H_0^1(\Omega, \Gamma_{Dir}))^2)$  et  $Q := \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$  (ou  $Q = \mathcal{C}^0([0, T], L_0^2(\Omega))$  si  $\Gamma_{Neu} = \emptyset$ ).

Ainsi, pour tout  $(v, q) \in V \times Q$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nu_\mu \Delta u + \nabla p = f_\mu - \Delta \varphi_0 \\
& \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v - \nu_\mu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v = f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \\
& \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u \cdot v - \nu_\mu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v \, dX = \int_\Omega f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \, dX \\
& \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u \cdot v + \nu_\mu \nabla u : \nabla v - p(\nabla \cdot v) \, dX = \\
& \quad \int_\Omega f_\mu \cdot v - \Delta \varphi_0 \cdot v \, dX + \int_\Gamma \left( \nu_\mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} \right) \cdot v \, dS \\
& \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u \cdot v + \nu_\mu \nabla u : \nabla v - p(\nabla \cdot v) \, dX = \\
& \quad \int_\Omega f_\mu \cdot v - \nabla \varphi_0 : \nabla v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \, dS \\
& \boxed{\frac{\partial}{\partial t} m(u, v) + a(u, v; \mu) + b(p, v) = f(v; \mu)} \tag{31}
\end{aligned}$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $f$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
m(u, v) &= \int_\Omega u \cdot v \, dX \\
a(u, v; \mu) &= \int_\Omega \nu_\mu \nabla u : \nabla v \, dX \\
b(p, v) &= - \int_\Omega p(\nabla \cdot v) \, dX \\
f(v; \mu) &= \int_\Omega f_\mu \cdot v - \nabla \varphi_0 : \nabla v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} \left( h_\mu - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{n}} \right) \cdot v \, dS
\end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot u = 0 \\
& q(\nabla \cdot u) = 0 \\
& \int_\Omega q(\nabla \cdot u) \, dX = 0 \\
& \boxed{b(q, u) = 0} \tag{32}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire le problème de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in V \times Q \text{ tels que } \forall (v, q) \in V \times Q : \\ \frac{\partial}{\partial t} m(u, v) + a(u, v; \mu) + b(p, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u) = 0 \end{array} \right. \tag{33}$$

Avec bien entendu les conditions de Cauchy  $u(0, X; \mu) = 0$  et  $p(0, X; \mu) = 0$ ,  $\forall X \in \Omega$ .

## 6.2 Discrétisation et résolution en éléments finis

Nous discrétisons tout d'abord l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $K$  sous-intervalles. Nous notons :

$$\delta t = \frac{T}{K} \quad k\delta t = t^k$$

Nous utilisons alors la notation suivante :

$$u(t^k, X) = u^k(X)$$

Nous rappelons le schéma d'Euler implicite qui permet d'approcher l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \simeq \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta t} \quad (34)$$

Soit  $\mathcal{T}_\delta$  une triangulation du domaine, de pas  $\delta$ . Comme dans le cas stationnaire, il est important de bien choisir les espaces éléments finis pour respecter la condition *inf-sup*, nous choisissons comme précédemment des éléments  $P2$  pour la vitesse et  $P1$  pour la pression. Nous posons alors  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_2}$  la famille des fonctions de forme  $P2$  et  $\{\psi_k\}_{k=1}^{N_1}$  la famille des fonctions de forme  $P1$ . Nous posons alors :

$$V_\delta := (\text{Vect}(\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_2})) \quad Q_\delta := \text{Vect}(\{\psi_k\}_{k=1}^{N_1})$$

Nous avons que  $V_\delta \times Q_\delta \subset (H_0^1(\Omega, \Gamma_{Dir}))^2 \times L^2(\Omega)$ , et nous posons les applications

$$\begin{aligned} t \in [0, T] &\longrightarrow \varphi_k \quad \forall k \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket \\ t \in [0, T] &\longrightarrow \psi_k \quad \forall k \in \llbracket 1, N_1 \rrbracket, \end{aligned}$$

ainsi nous avons que  $\mathcal{C}^0([0, T], V_\delta) \subset V$  et  $\mathcal{C}^0([0, T], Q_\delta) \subset Q$ . Notre problème variationnel (33) devient alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\delta^k, p_\delta^k) \in V_\delta \times Q_\delta \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_\delta \times Q_\delta : \\ \frac{\partial}{\partial t} m(u_\delta^k, v) + a(u_\delta^k, v; \mu) + b(p_\delta^k, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u_\delta^k) = 0 \end{array} \right. \quad (35)$$

Or comme  $(u_\delta^k, p_\delta^k) \in V_\delta \times Q_\delta$ ,  $\forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , il existe  $(U_{1,\delta}^{i,k})_{i=1}^{N_2}$ ,  $(U_{2,\delta}^{i,k})_{i=1}^{N_2}$  et  $(P_\delta^{i,k})_{i=1}^{N_1}$  tels que :

$$u_\delta^k = \begin{pmatrix} u_{1,\delta}^k \\ u_{2,\delta}^k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_2} \begin{pmatrix} U_{1,\delta}^{i,k} \\ U_{2,\delta}^{i,k} \end{pmatrix} \varphi_{1,i} = \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} \varphi_i \quad p_\delta^k = \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^{i,k} \psi_i$$

Nous appliquons alors l'approximation de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  et nous injectons les expressions précédentes dans les équations (35), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} m \left( \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} - U_\delta^{i,k-1} \varphi_i, v \right) + a \left( \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} \varphi_i, v; \mu \right) + b \left( \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^{i,k} \psi_i, v \right) = f(v; \mu) \\ b \left( q, \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} \varphi_i \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\delta t} \sum_{i=1}^{N_2} (U_\delta^{i,k} - U_\delta^{i,k-1}) m(\varphi_i, v) + \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} a(\varphi_i, v) + \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^{i,k} b(\psi_i, v) = f(v; \mu) \\ \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} b(q, \varphi_i) = 0 \end{cases}$$

En prenant finalement  $v = \varphi_j$ , pour  $j \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket$  et  $q = \psi_j$ , pour  $j \in \llbracket 1, N_1 \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \sum_{i=1}^{N_2} (U_\delta^{i,k} - U_\delta^{i,k-1}) m(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} a(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{N_1} P_\delta^{i,k} b(\psi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j; \mu) \\ \sum_{i=1}^{N_2} U_\delta^{i,k} b(\psi_j, \varphi_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A(\mu) + \frac{1}{\delta t} M & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\delta^k \\ P_\delta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\mu) + \frac{1}{\delta t} M U_\delta^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec les matrices  $A$  et  $B$  dont les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} (M)_{i,j} &= m(\varphi_i, \varphi_j) & 1 \leq i, j \leq N_2 \\ (A(\mu))_{i,j} &= a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) & 1 \leq i, j \leq N_2 \\ (B)_{k,i} &= b(\psi_k, \varphi_i) & 1 \leq k \leq N_1, 1 \leq i \leq N_2 \end{aligned}$$

Et de la même façon le vecteur  $F(\mu)$  est donné par :

$$(F(\mu))_i = f(\varphi_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq N_2$$

De plus, les conditions de Cauchy  $u(0, X; \mu) = 0$ ,  $p(0, X; \mu) = 0$ ,  $\forall X \in \Omega$ , nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} U_\delta^0 \\ P_\delta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le problème avec des éléments finis au temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , nous devons donc résoudre un système linéaire de dimension  $(N_1 + N_2)$ , en connaissant  $u_\delta^{k-1}(\mu)$ . Pour résoudre entièrement le problème, c'est-à-dire en tout temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , il nous faut alors résoudre  $K$  systèmes de dimension  $(N_1 + N_2)$ .

### 6.3 Problème en base réduite

Nous souhaitons utiliser la méthode des bases réduites sur ces équations. Pour cela supposons que les formes  $a_\mu$ ,  $f_\mu$  et  $h_\mu$  se décomposent affinement par rapport à  $\mu$ . Nous avons donc :

$$a(u, v; \mu) = \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(u, v) \quad f(v; \mu) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v)$$

Rappelons que si le problème n'admet pas directement de décomposition de la sorte, il est toujours possible d'utiliser l'EIM pour en obtenir une.

Nous conservons la même discrétisation en temps que dans la partie précédente (6.2). Nous avons alors la même notation :

$$u(t^k, X) = u^k(X)$$

Nous posons maintenant  $S = \{\mu_p, k_p\}_{p=1}^P$  un échantillon de  $P$  couples tous distincts de valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$  et de valeurs de  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ . Nous notons  $\{(w_p, s_p)\}_{p=1}^P$  la famille des  $P$  solutions associées, avec  $w_p := u_\delta^{k_p}(\mu_p)$  et  $s_p := p_\delta^{k_p}(\mu_p)$ . Pour chaque  $(w_p, s_p)$ ,  $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$ , nous avons que  $(w_p, s_p) \in V_\delta \times Q_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p \times Q_p := \text{Vect}(\{w_p\}_{p=1}^P) \times \text{Vect}(\{s_p\}_{p=1}^P) \subset V_\delta \times Q_\delta$$

$$\mathcal{C}^0([0, T], V_p) \subset V \quad \mathcal{C}^0([0, T], Q_p) \subset Q$$

Pour un temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , donné, nous avons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_p^k, p_p^k) \in V_p \times Q_p \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_p \times Q_p : \\ \frac{\partial}{\partial t} m(u_p^k, v) + a(u_p^k, v; \mu) + b(p_p^k, v) = f(v; \mu) \\ b(q, u_p^k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (u_p^k, p_p^k) \in V_p \times Q_p \text{ tels que } \forall (v, q) \in V_p \times Q_p : \\ \frac{\partial}{\partial t} m(u_p^k, v) + \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(u_p^k, v) + b(p_p^k, v) = \sum_{k=1}^{N_{fh}} \theta_k^{fh}(\mu) f_k(v) \\ b(q, u_p^k) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$  tel que  $\mu$  n'est pas dans  $S$ , comme  $(u_p(\mu), p_p(\mu)) \in V_p \times Q_p$ , il existe un vecteur  $(\alpha_p^i)_{i=1}^P$  tel que :

$$(u_p^k(\mu), p_p^k(\mu)) = \sum_{i=1}^P \alpha_p^{i,k}(\mu) (w_i, s_i) \quad \alpha_p(\mu) \in \mathbb{R}^P.$$

Si nous injectons ces décompositions dans la formulation variationnelle (36), en prenant  $v = w_j$  et  $q = s_j$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, P \rrbracket$  et en utilisant l'approximation de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} m \left( \sum_{i=1}^P \left( \alpha_p^{i,k}(\mu) - \alpha_p^{i,k-1}(\mu) \right) w_i, w_j \right) + \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^{i,k}(\mu) w_i, w_j \right) \\ & \quad + b \left( \sum_{i=1}^P \alpha_p^{i,k}(\mu) s_i, w_j \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^P \left( \alpha_p^{i,k}(\mu) - \alpha_p^{i,k-1}(\mu) \right) \frac{1}{\delta t} m(w_i, w_j) + \alpha_p^{i,k}(\mu) \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(w_i, w_j) \\ & \quad + \alpha_p^{i,k}(\mu) b(s_i, w_j) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \end{aligned}$$

pour la première ligne. Puis :

$$\begin{aligned} b \left( s_j, \sum_{i=1}^P \alpha_p^{i,k}(\mu) w_i \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^P \alpha_p^{i,k}(\mu) b(s_j, w_i) &= 0 \end{aligned}$$

pour la seconde. Nous pouvons alors résoudre le problème soit de façon monolithique, soit en variables séparées. Nous choisissons d'utiliser la version monolithique, nous rassemblons donc les deux lignes d'équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P \left( \alpha_p^{i,k}(\mu) - \alpha_p^{i,k-1}(\mu) \right) \frac{1}{\delta t} m(w_i, w_j) + \alpha_p^{i,k}(\mu) \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) a_k(w_i, w_j) \\ + \alpha_p^{i,k}(\mu) \left( b(s_i, w_j) - b(s_i, w_j) \right) = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) f_k(w_j) \end{aligned}$$

Soit finalement sous forme matricielle :

$$\boxed{\left( \frac{1}{\delta t} M + \sum_{k=1}^{N_a} \theta_k^a(\mu) A_p^k + B - B^t \right) U_p = \sum_{k=1}^{N_f} \theta_k^f(\mu) F^k + \frac{1}{\delta t} U_p^{k-1}} \quad (37)$$

Où les matrices  $A_k$ ,  $1 \leq k \leq N_a$ , et  $B$  sont données par :

$$\begin{aligned} (A^k)_{i,j} &= a_k(w_i, w_j) & 1 \leq k \leq N_a, 1 \leq i, j \leq P \\ (B)_{i,j} &= b(s_i, w_j) & 1 \leq i, j \leq P \end{aligned}$$

et les vecteurs  $F_k$  et  $G_k$  par :

$$(F^k)_i = f_k(w_i) \quad 1 \leq k \leq N_f, 1 \leq i \leq P$$

De plus, les conditions de Cauchy  $u(0, X; \mu) = 0$ ,  $p(0, X; \mu) = 0$ ,  $\forall X \in \Omega$ , nous donnent alors :

$$\alpha_p^0 = 0$$

Pour résoudre le problème en base réduite au temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , nous devons donc résoudre un système linéaire de dimension  $P$ . Pour résoudre entièrement le problème, c'est-à-dire en tout temps  $t^k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , il nous faut alors résoudre  $K$  systèmes de dimension  $P$ .

Comme dans le cas stationnaire, résoudre un problème en base réduite demande  $\mathcal{O}(P \times (N^1 + N^2) + P^3)$  calculs avec l'approche monolithique et par conséquent demande  $\mathcal{O}(K(P \times (N^1 + N^2) + P^3))$  calculs pour la résolution en tout temps. Contre  $\mathcal{O}(K(N^1 + N^2)^3)$  calculs pour la résolution en tout temps en EF. Ainsi, si  $P$  est faible devant  $N^1$  et  $N^2$ , nous avons un gain considérable de calculs, surtout pour  $K$  très grand.

Pour construire la base réduite associée au problème, il est possible d'utiliser un algorithme purement glouton. Cependant, en pratique cette approche peut échouer. Ainsi, comme dans les équations de la chaleur instationnaires (cf. partie (3.3)), il est recommandé d'utiliser un algorithme couplé *POD-greedy*.



## Quatrième partie

# Perspectives

### 7 Extension aux cas multi-domaine

Avec l'exemple de la partie (5.6.2) nous avons vu qu'il est possible de mettre en échec la méthode des bases réduites. L'une des clefs pouvant expliquer cet échec est la contrainte de faible épaisseur de Kolmogorov, il est possible que cette dernière ne soit pas respectée dans l'exemple en question. C'est-à-dire que les solutions pour différentes valeurs de  $\mu$  sont trop différentes les unes des autres. Une idée pour contourner ce problème est d'introduire des décompositions dans des bases réduites locales à chaque sous-domaine plutôt qu'une seule décomposition sur le domaine global. Ainsi, même si le problème présente globalement une forte variabilité par rapport à  $\mu$ , il est peut-être plus régulier localement et donc plus simple à approcher.

#### 7.1 Subdivision en deux sous-domaines

Pour commencer dans un cadre relativement simple, nous nous concentrons sur les domaines subdivisés en deux. Nous notons  $\Omega_\mu$  le domaine et  $\Omega_\mu^1, \Omega_\mu^2$  les deux sous-domaines tels que :

$$\bar{\Omega}_\mu = \bar{\Omega}_\mu^1 \cup \bar{\Omega}_\mu^2 \quad \Omega_\mu^1 \cap \Omega_\mu^2 = \emptyset \quad \bar{\Omega}_\mu^1 \cap \bar{\Omega}_\mu^2 = \Gamma_{inter}$$

De la même façon nous posons  $\hat{\Omega}$  un domaine de référence indépendant de  $\mu$  subdivisé en  $\hat{\Omega}^1$  et  $\hat{\Omega}^2$ . Soit  $T$  un difféomorphisme tel que :

$$T_\mu : \quad \begin{aligned} \Omega_\mu &\longrightarrow \hat{\Omega} \\ (x, y) &\longrightarrow (T_{\mu,x}^i(x, y), T_{\mu,y}^i(x, y)) \quad \text{si } (x, y) \in \Omega^i, \forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \end{aligned}$$

$$T_\mu^{-1} : \quad \begin{aligned} \hat{\Omega} &\longrightarrow \Omega_\mu \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\longrightarrow (T_{\mu,\hat{x}}^{i,-1}(\hat{x}, \hat{y}), T_{\mu,\hat{y}}^{i,-1}(\hat{x}, \hat{y})) \quad \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}^i, \forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \end{aligned}$$

et tel que pour  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , les  $T_\mu^i$  soient eux aussi des difféomorphismes :

$$\begin{aligned} T_\mu^i &: \quad \Omega_\mu^i \longrightarrow \hat{\Omega}^i \\ T_\mu^{i,-1} &: \quad \hat{\Omega}^i \longrightarrow \Omega_\mu^i \end{aligned}$$

Nous nous intéressons toujours au même problème :

Nous cherchons  $(u(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega_\mu))^2 \times L^2(\Omega_\mu)$  tel que :

$$(\mathcal{P}_\mu) : \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f_\mu & \text{dans } \Omega_\mu \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega_\mu \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - p \vec{n} = g_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu} \end{cases}$$

Avec  $f_\mu \in (L^2(\Omega_\mu))^2$  et  $g_\mu \in (L^2(\Gamma_\mu))^2$ .

Nous posons  $V := \{v \in (H^1(\Omega_\mu))^2 \mid v|_{\Gamma_{Dir}} = 0\}$ . Soit  $v \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v &= f \cdot v \\ \int_{\Omega_\mu} -\nu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v \, dX &= \int_{\Omega_\mu} f \cdot v \, dX \\ \int_{\Omega_\mu} \nabla u : \nabla v + p \nabla \cdot v \, dX &= \int_{\Omega_\mu} f \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}} v \cdot g \, dS \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\mu^i} \nabla u : \nabla v + p \nabla \cdot v \, dX &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\mu^i} f \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}^i} v \cdot g \, dS \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^2 a^i(u, v; \mu) + b^i(p, v; \mu) = \sum_{i=1}^2 f^i(v; \mu)} \quad (38)$$

Avec,  $i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} a^i(u, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu^i} \nu \nabla u : \nabla v \, dX \\ b^i(p, v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu^i} p \nabla \cdot v \, dX \\ f^i(v; \mu) &= \int_{\Omega_\mu^i} f \cdot v \, dX + \int_{\Gamma_{Neu}^i} v \cdot g \, dS \end{aligned}$$

Comme précédemment nous utilisons les résultats (25) et (27) des lemmes de la partie (5.2) pour ramener notre problème sur le domaine de référence. Ici, nous utilisons (25) et (27) sur chaque sous-domaine pour nous ramener au sous-domaine de référence correspondant,  $i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} \hat{a}^i(\hat{u}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}^i} \nu \left( (\hat{\nabla} \hat{u})^t \hat{\nabla} \hat{v} \right) : (J_{T_\mu^{i,-1}}^t J_{T_\mu^{i,-1}}^t) |J_{T_\mu^{i,-1}}| \, d\hat{X} \\ \hat{b}^i(\hat{p}, \hat{v}; \mu) &= \int_{\hat{\Omega}^i} \hat{p} (J_{T_\mu^{i,-1}}^t \hat{\nabla}) \cdot \hat{v} |J_{T_\mu^{i,-1}}| \, d\hat{X} \\ \hat{f}^i(\hat{v}) &= \int_{\hat{\Gamma}_{Neu}^i} \hat{h} \cdot \hat{v} |J_{T_\mu}| \left\| J_{T_\mu^{-1}}^t \cdot \vec{n} \right\|_{\mathbb{R}^2} \, d\hat{S} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^2 \hat{a}^i(\hat{u}, \hat{v}; \mu) + \hat{b}^i(\hat{p}, \hat{v}; \mu) = \sum_{i=1}^2 \hat{f}^i(\hat{v}; \mu)} \quad (39)$$

Nous posons maintenant  $S^1 = \{\mu_p^1\}_{p=1}^{P^1}$  et  $S^2 = \{\mu_p^2\}_{p=1}^{P^2}$  deux échantillons de respectivement  $P^1$  et  $P^2$  valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$ . Nous notons  $\{(w_p^i, s_p^i)\}_{p=1}^{P^i}$ ,  $i = 1, 2$  les familles de solutions associées, avec  $w_p^i := u_\delta(\mu_p^i)|_{\Omega^i}$  et  $s_p^i := p_\delta(\mu_p^i)|_{\Omega^i}$ . Pour  $i = 1, 2$ , pour tout  $p \in \llbracket 1, P^i \rrbracket$ , nous avons que  $(w_p^i, s_p^i) \in V_\delta \times Q_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p \times Q_p := \text{Vect}(\{w_p^1\}_{p=1}^{P^1}, \{w_p^2\}_{p=1}^{P^2}) \times \text{Vect}(\{s_p^1\}_{p=1}^{P^1}, \{s_p^2\}_{p=1}^{P^2}) \subset V_\delta \times Q_\delta$$

Nous avons donc un espace vectoriel fini de dimension  $P = P^1 + P^2$ . Supposons que les formes bilinéaires  $\hat{a}^i$  et  $\hat{b}^i$ , ainsi que les formes linéaires  $\hat{f}^i$ ,  $i = 1, 2$  admettent des

décompositions affines par rapport à  $\mu$ , soit,  $i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned}\hat{a}^i(\hat{u}, \hat{v}; \mu) &= \sum_{n=1}^{N_{\hat{a}}^i} \theta_{\hat{a}}^{i,n}(\mu) \hat{a}_n^i(\hat{u}, \hat{v}) \\ \hat{b}^i(\hat{p}, \hat{v}; \mu) &= \sum_{n=1}^{N_{\hat{b}}^i} \theta_{\hat{b}}^{i,n}(\mu) \hat{b}_n^i(\hat{p}, \hat{v}) \\ \hat{f}^i(\hat{v}; \mu) &= \sum_{n=1}^{N_{\hat{f}}^i} \theta_{\hat{f}}^{i,n}(\mu) \hat{f}_n^i(\hat{v})\end{aligned}$$

Notre problème devient alors :

$$\begin{aligned}& \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P : \\ \sum_{i=1}^2 \hat{a}^i(\hat{u}, \hat{v}; \mu) + \hat{b}^i(\hat{p}, \hat{v}; \mu) = \sum_{i=1}^2 \hat{f}^i(\hat{v}; \mu) \\ \sum_{i=1}^2 \hat{b}^i(\hat{q}, \hat{u}; \mu) = 0 \end{array} \right. \\ \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P : \\ \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{n=1}^{N_{\hat{a}}^i} \theta_{\hat{a}}^{i,n}(\mu) \hat{a}_n^i(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{n=1}^{N_{\hat{b}}^i} \theta_{\hat{b}}^{i,n}(\mu) \hat{b}_n^i(\hat{p}, \hat{v}) \right) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_{\hat{f}}^i} \theta_{\hat{f}}^{i,n}(\mu) \hat{f}_n^i(\hat{v}) \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_{\hat{b}}^i} \theta_{\hat{b}}^{i,n}(\mu) \hat{b}_n^i(\hat{q}, \hat{u}) = 0 \end{array} \right. \\ \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P : \\ \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{n=1}^{N_{\hat{a}}^i} \theta_{\hat{a}}^{i,n}(\mu) \hat{a}_n^i(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{n=1}^{N_{\hat{b}}^i} \theta_{\hat{b}}^{i,n}(\mu) (\hat{b}_n^i(\hat{p}, \hat{v}) - \hat{b}_n^i(\hat{q}, \hat{u})) \right) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_{\hat{f}}^i} \theta_{\hat{f}}^{i,n}(\mu) \hat{f}_n^i(\hat{v}) \end{array} \right. \quad (40)\end{aligned}$$

Nous utilisons une approche monolithique sur chacun des sous-domaines, nous avons alors que si  $(\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P$  il existe deux vecteurs  $\Sigma^1(\mu) = (\sigma_p^1(\mu))_{p=1}^{P^1}$  et  $\Sigma^2(\mu) = (\sigma_p^2(\mu))_{p=1}^{P^2}$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{1,P} \\ \hat{u}_{2,P} \\ \hat{p}_P \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) \begin{pmatrix} w_{1,p}^1 \\ w_{2,p}^1 \\ s_p^1 \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) \begin{pmatrix} w_{1,p}^2 \\ w_{2,p}^2 \\ s_p^2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons voir cela comme un assemblage de deux décompositions différentes sur chaque sous-domaine. Remarquons que pour  $i = 1, 2, j = 1, 2$  :

$$\begin{aligned}a_n^i(w_p^j, \hat{v}) &= 0 \quad \forall v \in V_P, \text{ si } i \neq j \\ b_n^i(\hat{p}, w_p^j) &= 0 \quad \forall p \in Q_P, \text{ si } i \neq j \\ f_n^i(w_p^j) &= 0 \quad \text{si } i \neq j\end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, nous mettons de coté les décompositions affines par rapport à  $\mu$ . En injectant finalement cette double décomposition dans notre formulation variationnelle précédente et en prenant, pour  $j = 1, 2$ ,  $\hat{v} = w_l^j$  et  $\hat{q} = s_l^j$ , pour  $p \in \llbracket 1, P^i \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \hat{a}^i(\hat{u}, w_l^j; \mu) &= \sum_{i=1}^2 \hat{a}^i \left( \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) w_p^1 + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) w_p^2, w_l^j; \mu \right) \\ &= \hat{a}^1 \left( \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) w_p^1, w_l^1; \mu \right) + \hat{a}^2 \left( \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) w_p^2, w_l^2; \mu \right) \\ &= \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) \hat{a}^1(w_p^1, w_l^1; \mu) + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) \hat{a}^2(w_p^2, w_l^2; \mu) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \Sigma^2(\mu) \end{pmatrix}$$

Avec les matrices :

$$(A^i)_{p,l} = \hat{a}^i(w_p^i, w_l^i; \mu) \quad 1 \leq p, l \leq P^j$$

Nous faisons de même pour  $\hat{b}$  :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \hat{b}^i(\hat{p}, w_l^j; \mu) - \hat{b}^i(s_l^j, \hat{u}; \mu) = \\ &\sum_{i=1}^2 \hat{b}^i \left( \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) s_p^1 + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) s_p^2, w_l^j; \mu \right) - \hat{b}^i \left( s_l^j, \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) w_p^1 + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) w_p^2; \mu \right) = \\ &\sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) \left( \hat{b}^1(s_p^1, w_l^1; \mu) - \hat{b}^1(s_l^1, w_p^1; \mu) \right) + \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) \left( \hat{b}^2(s_p^2, w_l^2; \mu) - \hat{b}^2(s_l^2, w_p^2; \mu) \right) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} B^1 - (B^1)^t & 0 \\ 0 & B^2 - (B^2)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \Sigma^2(\mu) \end{pmatrix}$$

Avec les matrices :

$$(B^i)_{p,l} = \hat{b}^i(s_p^i, w_l^i; \mu) \quad 1 \leq p, l \leq P^j$$

De plus nous avons les vecteurs sources :

$$(F^i)_l = \hat{f}^i(w_l^i; \mu) \quad 1 \leq l \leq P^j$$

Nous pouvons alors écrire le problème sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A^1 + B^1 - (B^1)^t & 0 \\ 0 & A^2 + B^2 - (B^2)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \Sigma^2(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$$

Cependant, il est facile de voir que le problème ainsi formulé n'est pas correct. Supposons en effet que  $F^2 = 0$ , nous avons alors automatiquement que  $\Sigma^2(\mu) = 0$  et donc que  $u_P(\mu)|_{\Omega_\mu^2} = 0$ , ce qui n'est pas forcément vrai (si  $F^1 \neq 0$ ). Il nous faut donc trouver un moyen de «transmettre l'information» entre les deux domaines.

L'idée la plus intuitive est d'imposer l'égalité entre les deux restrictions de la solution au niveau de l'interface :

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) w_p^1|_{\hat{\Gamma}_{inter}} = \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) w_p^2|_{\hat{\Gamma}_{inter}} \\ \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) s_p^1|_{\hat{\Gamma}_{inter}} = \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) s_p^2|_{\hat{\Gamma}_{inter}} \end{cases}$$

Mais cette contrainte est trop restrictive et entraîne souvent la nullité de la fonction sur l'interface. Pour relaxer cette contrainte nous imposons seulement une égalité au sens des distributions :

$$\int_{\Gamma_{\mu,inter}} \xi \left( \sum_{p=1}^{P^1} \sigma_p^1(\mu) (w_{1,p}^1 + w_{2,p}^1 + s_p^1) \circ T_\mu - \sum_{p=1}^{P^2} \sigma_p^2(\mu) (w_{1,p}^2 + w_{2,p}^2 + s_p^2) \circ T_\mu \right) dS, \quad \forall \xi \in W$$

Où  $W := L^2(\Gamma_{\mu,inter})$ . Nous posons ensuite  $\mathcal{T}_\zeta^W$  une subdivision de  $\hat{\Gamma}_{inter}$  de pas  $\zeta$ , nous notons  $\{\Upsilon_i\}_{i=1}^{N_W}$  la famille des fonctions de forme associées. Nous avons alors l'espace éléments finis associé à  $\hat{W}$  donné par :

$$\hat{W}_\zeta = \text{Vect}(\{\Upsilon_i\}_{i=1}^{N_W}) \subset \hat{W}$$

### 7.1.1 Approche monolithique

Pour introduire cette contrainte dans notre problème sous forme monolithique, nous commençons par poser les formes équivalentes  $c$  et  $\hat{c}$  suivantes, pour  $u \in V$ ,  $\hat{u} \in \hat{V}$ ,  $p \in Q$ ,  $\hat{p} \in \hat{Q}$ ,  $\xi \in W$  et  $\hat{\xi} \in \hat{W} := \{\xi \circ T_\mu^{-1}, \forall \xi \in W\}$  :

$$\begin{aligned} c(\xi, (u, p); \mu) &= \int_{\Gamma_{\mu,inter}} \xi(u_1 + u_2 + p) dS \\ \hat{c}(\hat{\xi}, (\hat{u}, \hat{p}); \mu) &= \int_{\hat{\Gamma}_{inter}} \hat{\xi}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{p}) |J_{T_\mu}| \left| (J_{T_\mu}^{-1})^t \cdot \vec{n} \right| d\hat{S} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire notre problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\hat{u}_P, \hat{p}_P, \hat{\xi}_\zeta) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \times \hat{W}_\zeta \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}, \gamma) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \times \hat{W}_\zeta : \\ \hat{a}(\hat{u}_P, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}_P, \hat{v}; \mu) - \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}_P; \mu) + \hat{c}(\hat{\xi}_\zeta, (\hat{v}, \hat{q})) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{c}(\gamma, (\hat{u}_P, \hat{p}_P); \mu) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\hat{\xi}_\zeta \in \hat{W}_\zeta$ , il existe  $\Lambda_\zeta = (\lambda_i)_{i=1}^{N_W}$  tel que :

$$\hat{\xi}_\zeta = \sum_{i=1}^{N_W} \lambda_i \Upsilon_i$$

En injectant cette décomposition et en prenant  $\gamma = \Upsilon_j$  pour  $j \in \llbracket 1, N_W \rrbracket$ , nous avons le problème sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^1 + (B^1)^t - B^1 & 0 & C^1 \\ 0 & A^2 + B^2 - (B^2)^t & -C^2 \\ C^1 & -C^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \Sigma^2(\mu) \\ \Lambda(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système linéaire de dimension  $(P^1 + P^2 + N_W)$  nous permet donc de connaître les décompositions de  $(u_P(\mu), p_P(\mu))$  sur  $\Omega_\mu^1$  et sur  $\Omega_\mu^2$ , ainsi que  $\xi_\zeta$  qui correspond au flux à l'interface entre les deux domaines.

Le système ainsi posé est inversible quelque soit la dimension  $N_W$  de l'espace  $\hat{W}_\zeta$ . Cependant, remarquons que si  $N_W > P^1 + P^2$  alors la partie du système :

$$\begin{pmatrix} C^1 & -C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \Sigma^2(\mu) \end{pmatrix} = 0$$

impose  $\Sigma^1(\mu) = \Sigma^2(\mu) = 0$ , solution qui n'a évidemment pas de sens. En pratique nous utilisons un espace de  $\hat{W}_\zeta$  de dimension très faible,  $N_W = 2, 3$  ou  $4$ .

Remarquons que cette formulation ne peut pas être utilisée en EF, car elle suppose que  $\dim(\hat{V}_P) = \dim(\hat{Q}_P)$  ce qui n'est pas vrai pour  $\hat{V}_\delta$  et  $\hat{Q}_\delta$ .

### 7.1.2 Approche découplée

Pour introduire la contrainte dans le problème sous découplé vitesse-pression, nous devons poser les formes bilinéaires équivalentes  $c$  et  $\hat{c}$  suivantes, pour  $u \in V$ ,  $\hat{u} \in \hat{V}$ ,  $\xi \in W$  et  $\hat{\xi} \in \hat{W}$  :

$$\begin{aligned} c(\xi, u; \mu) &= \int_{\Gamma_{\mu,inter}} \xi(u_1 + u_2) dS \\ \hat{c}(\hat{\xi}, \hat{u}; \mu) &= \int_{\hat{\Gamma}_{inter}} \hat{\xi}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2) |J_{T_\mu}| |(J_{T_\mu}^{-1})^t \cdot \vec{n}| d\hat{S} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire notre problème de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}_P, \hat{p}_P, \hat{\xi}_\zeta) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \times \hat{W}_\zeta \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}, \gamma) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \times \hat{W}_\zeta : \\ \hat{a}(\hat{u}_P, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}_P, \hat{v}; \mu) + \hat{c}(\hat{\xi}_\zeta, \hat{v}) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}_P; \mu) = 0 \\ \hat{c}(\gamma, \hat{u}_P; \mu) = 0 \end{array} \right.$$

Comme  $\hat{\xi}_\zeta \in \hat{W}_\zeta$ , il existe  $\Lambda_\zeta = (\lambda_i)_{i=1}^{N_W}$  tel que :

$$\hat{\xi}_\zeta = \sum_{i=1}^{N_W} \lambda_i \Upsilon_i$$

En injectant cette décomposition et en prenant  $\gamma = \Upsilon_j$  pour  $j \in \llbracket 1, N_W \rrbracket$ , nous avons le problème sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 & (B^1)^t & 0 & (C^1)^t \\ 0 & A^2 & 0 & (B^2)^t & -(C^2)^t \\ B^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & 0 & 0 \\ C^1 & -C^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^{(u,1)}(\mu) \\ \Sigma^{(p,1)}(\mu) \\ \Sigma^{(u,2)}(\mu) \\ \Sigma^{(p,2)}(\mu) \\ \Lambda(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire de dimension  $(2P^1 + 2P^2 + N_W)$  nous obtenons des décompositions de  $(u_P(\mu), p_P(\mu))$  sur  $\Omega_\mu^1$  et sur  $\Omega_\mu^2$  découplée, ainsi que  $\xi_\zeta$  qui correspond au flux à l'interface entre les deux domaines.

Nous avons dans cette formulation la même contrainte sur la dimension  $N_W$  de l'espace  $\hat{W}_\zeta$ . Comme précédemment nous utilisons généralement  $N_W = 2, 3$  ou 4.

Remarquons que cette formulation peut aussi être utilisée pour résoudre le problème en éléments finis en prenant  $\hat{V}_\delta$  et  $\hat{Q}_\delta$  à la place de  $\hat{V}_P$  et  $\hat{Q}_P$ . Utile notamment pour valider cette formulation.

Autre remarque, les matrices obtenues après assemblage pour des problèmes de Stokes ont souvent des conditionnement très mauvais. Ici, au vu de la formulation, nous pouvons nous attendre à des conditionnements encore moins bons. Notons que le conditionnement du problème va dépendre de la dimension de l'espace  $\hat{W}_\zeta$  choisi.

## 7.2 Les cas à sous-domaines multiples

Partant de ce que nous venons développer dans la partie précédente, il est possible d'étendre la méthode à un domaine sub-divisé en plus de 2 sous domaines. Supposons que nous ayons  $D$  sous-domaines, en s'inspirant de la formulation variationnelle (40), nous obtenons directement :

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P \text{ tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P : \\ \sum_{i=1}^D \left( \sum_{n=1}^{N_a^i} \theta_{\hat{a}}^{i,n}(\mu) \hat{a}_n^i(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{n=1}^{N_b^i} \theta_{\hat{b}}^{i,n}(\mu) (\hat{b}_n^i(\hat{p}, \hat{v}) - \hat{b}_n^i(\hat{q}, \hat{u})) \right) = \sum_{i=1}^D \sum_{n=1}^{N_f^i} \theta_{\hat{f}}^{i,n}(\mu) \hat{f}_n^i(\hat{v}) \end{array} \right. \quad (41)$$

Nous posons maintenant  $S^d = \{\mu_p^d\}_{p=1}^{P^d}$ ,  $d \in \llbracket 1, D \rrbracket$ ,  $D$  échantillons de respectivement  $P^d$  valeurs de  $\mu \in \mathcal{D}$ . Nous notons  $\{(w_p^i, s_p^i)\}_{p=1}^{P^i}$ ,  $i \in \llbracket 1, D \rrbracket$  les familles de solutions associées, avec  $w_p^i := u_\delta(\mu_p^i)|_{\Omega^i}$  et  $s_p^i := p_\delta(\mu_p^i)|_{\Omega^i}$ . Pour  $i \in \llbracket 1, D \rrbracket$ , pour tout  $p \in \llbracket 1, P^i \rrbracket$ , nous avons que  $(w_p^i, s_p^i) \in V_\delta \times Q_\delta$ , si bien que nous avons :

$$V_p \times Q_p := \text{Vect}(\{w_p^1\}_{p=1}^{P^1}, \dots, \{w_p^D\}_{p=1}^{P^D}) \times \text{Vect}(\{s_p^1\}_{p=1}^{P^1}, \dots, \{s_p^D\}_{p=1}^{P^D}) \subset V_\delta \times Q_\delta$$

Nous utilisons une approche monolithique sur chacun des sous-domaines, nous avons alors que si  $(\hat{u}(\mu), \hat{p}(\mu)) \in \hat{V}_P \times \hat{Q}_P$  il existe  $D$  vecteurs  $\Sigma^d(\mu) = (\sigma_p^d(\mu))_{p=1}^{P^d}$ ,  $d \in \llbracket 1, D \rrbracket$ , respectivement de taille  $P^d$ , tels que :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{1,P} \\ \hat{u}_{2,P} \\ \hat{p}_P \end{pmatrix} = \sum_{d=1}^D \sum_{p=1}^{P^d} \sigma_p^d(\mu) \begin{pmatrix} w_{1,p}^d \\ w_{2,p}^d \\ s_p^d \end{pmatrix} \quad (42)$$

Il nous faut maintenant traiter le cas des interfaces. Ainsi, nous notons  $\hat{\Gamma}_{\mu,inter}^{l,m}$  l'interface entre les sous domaines  $\hat{\Omega}^l$  et  $\hat{\Omega}^m$ , nous notons alors la forme bilinéaire  $\hat{c}^{l,m}$  suivante,  $\hat{u} \in \hat{V}$ ,  $\hat{p} \in \hat{Q}$  et  $\hat{\xi} \in \hat{W} := \{\xi \circ T_\mu^{-1}, \forall \xi \in L^2(\hat{\Gamma}_{\mu,inter}^{l,m})\}$  :

$$\hat{c}^{l,m}(\hat{\xi}, (\hat{u}, \hat{p}); \mu) = \int_{\hat{\Gamma}_{\mu,inter}^{l,m}} \hat{\xi}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{p}) |J_{T_\mu}| \left| (J_{T_\mu}^{-1})^t \cdot \vec{n} \right| d\hat{S}$$

Nous posons ensuite  $\mathcal{T}_\zeta^{W^{l,m}}$  une subdivision de  $\hat{\Gamma}_{\mu,inter}^{l,m}$  de pas  $\zeta$ , nous notons  $\{\Upsilon_i^{l,m}\}_{i=1}^{N_{W^{l,m}}}$  la famille des fonctions de forme associées. Nous avons alors l'espace éléments finis associé à  $W^{\hat{l},m}$  donné par :

$$W^{\hat{l},m}_\zeta = \text{Vect}(\{\Upsilon_i^{l,m}\}_{i=1}^{N_{W^{l,m}}}) \subset \hat{W}$$

Nous pouvons alors écrire notre problème de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}_p, \hat{p}_p, \{\hat{\xi}_\zeta^{l,m}\}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \times \hat{W}_\zeta^{l,m}, \\ \text{tels que } \forall (\hat{q}, \hat{v}, \{\gamma^{l,m}\}) \in \hat{V}_p \times \hat{Q}_p \times \hat{W}_\zeta^{l,m} : \\ \hat{a}(\hat{u}_p, \hat{v}; \mu) + \hat{b}(\hat{p}_p, \hat{v}; \mu) + \hat{c}(\hat{\xi}_\zeta^{l,m}, \hat{v}) = \hat{f}(\hat{v}; \mu) \\ \hat{b}(\hat{q}, \hat{u}_p; \mu) = 0 \\ \hat{c}^{l,m}(\gamma^{l,m}, \hat{u}_p; \mu) = 0 \quad \forall l, m \text{ tel que } \Omega^l \text{ et } \Omega^m \text{ sont voisins} \end{array} \right.$$

Comme  $\hat{\xi}_\zeta^{l,m} \in \hat{W}_\zeta^{l,m}$ , il existe  $\Lambda_\zeta^{l,m} = (\lambda_i^{l,m})_{i=1}^{N_{W^{l,m}}}$  tel que :

$$\hat{\xi}_\zeta^{l,m} = \sum_{i=1}^{N_{W^{l,m}}} \lambda_i^{l,m} \Upsilon_i^{l,m}$$

En injectant cette décomposition et les décompositions (42), puis en prenant  $\hat{v} = w_j^d$ ,  $\hat{q} = s_j^p$ ,  $\forall d \in \llbracket 1, D \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, P^d \rrbracket$ , puis enfin  $\gamma^{l,m} = \Upsilon_j^{l,m}$  pour  $j \in \llbracket 1, N_{W^{l,m}} \rrbracket$ , nous avons le problème sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^1 + (B^1)^t - B^1 & 0 & 0 & (C^1)^t & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & A^D + (B^D)^t - B^D & -(C^D)^t & \dots \\ C^1 & -C^2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1(\mu) \\ \vdots \\ \Sigma^D(\mu) \\ \Lambda^{1,2}(\mu) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La taille globale du système dépend alors du nombre de sous-domaines  $D$ , de leur dimension respective  $P^d$ , du nombre d'interfaces et des dimensions des espaces éléments finis sur ces interfaces. Des domaines très compliqués avec de nombreuses interfaces et/ou nombreux sous-domaines peut engendrer de (très) gros système à résoudre. Il faut donc faire attention et ne pas prendre n'importe quelle décomposition.



## 8 Reconstruire la pression à partir de la vitesse

Comme nous l'évoquions dans la partie (4.4), dans le cas des écoulements avec  $f = 0$ , la pression est souvent très «régulière». Elle est en général linéaire des bords avec le flux entrant, vers les bords avec le flux sortant. Cette régularité fait que la pression est souvent mieux approchée par une base réduite que la vitesse. C'est une observation très importante puisque l'un de nos objectifs est d'essayer de reconstruire la pression en utilisant uniquement des mesures de vitesse.

Une idée pertinente est alors de coupler une base réduite avec une méthode EIM. Pour ce faire, nous commençons par construire une base réduite sur un problème de Stokes. Nous pouvons alors utiliser l'EIM sur la partie vitesse de la base constituée. Ainsi, à partir de l'EIM, si nous connaissons quelques mesures d'un champ de vitesse observé  $u(\mu)$ , nous pouvons en déduire sa décomposition dans la base réduite. Enfin, en utilisant la même décomposition pour la pression dans la base réduite, nous sommes en mesure de reconstruire cette dernière sur tout le domaine.

Comme la pression est plus régulière, approcher la vitesse correctement avec l'EIM nous assure d'obtenir la bonne pression correspondante. Jusqu'ici, nous avons été en mesure d'utiliser l'EIM sur une base réduite et ainsi résoudre des problèmes en connaissant les bonnes mesures de  $u(\mu)$ . Cependant, nous n'avons pas encore essayé d'approcher la pression en ne connaissant que la vitesse. De plus, cette technique nécessite une étude théorique pour pouvoir obtenir une majoration concrète de l'erreur en pression par l'erreur en vitesse.

Une autre extension possible serait d'utiliser la Méthode d'Interpolation Empirique Généralisée (GEIM en anglais), détaillée dans la thèse [3]. Cette méthode permet d'assouplir l'EIM en remplaçant les évaluations ponctuelles par des évaluations d'applications linéaires. Dans le contexte de mesure physique, il est plus réaliste d'utiliser des intégrales sur  $u(\mu)$ , que de véritables évaluations ponctuelles. Outre cette différence, les deux méthodes sont très similaires. Ainsi, il est *a priori* possible d'utiliser la GEIM couplée à une base réduite comme précédemment.

## 9 Estimateur d'erreur

Un autre point que nous n'avons pas abordé est l'existence d'un estimateur d'erreur *a posteriori*. Cet estimateur, décrit dans le livre [13], permet d'évaluer  $\|u_\delta(\mu) - u_p(\mu)\|_{1,\Omega}$  sans connaître  $u_\delta$ . Cet estimateur peut donc se révéler très utile dans la phase de construction de la base réduite. En effet, il permet de connaître l'erreur commise par la base sans avoir à construire la base  $\{u_\delta(\mu_n)\}_{n=1}^{N_{\mathcal{D}_h}}$ , où  $N_{\mathcal{D}_h}$  est la taille de la discrétisation de l'espace des paramètres, au préalable.

Cet estimateur dont l'efficacité est prouvé [13], permet d'utiliser des espaces  $\mathcal{D}_h$  de grande taille et ainsi d'obtenir les meilleurs valeurs de  $\mu$  possible. Dans les exemples que nous avons présentés, nous nous sommes passé de cet estimateur, mais il paraît évident que cet estimateur est un très bon moyen pour améliorer la qualité des bases réduites créées, tout en réduisant le temps de calculs et le stockage utilisé.

## 10 Extrapolation

La méthode des bases réduites peut être vue comme une méthode d'interpolation puisque pour  $\mu \in \mathcal{D}$ , nous allons approcher  $u(\mu)$  (ou  $((u(\mu), p(\mu)))$ ) par une combinaison linéaire de fonctions. De plus, par construction avec l'algorithme *greedy* ou la méthode POD, nous avons une idée de l'erreur commise par cette interpolation.

Après construction des bases réduites pour nos différents problèmes, nous avons voulu aller plus loin en utilisant celles-ci pour faire de l'extrapolation. L'idée est toujours d'approcher  $u(\mu)$  (ou  $((u(\mu), p(\mu)))$ ) par une combinaison linéaire des fonctions de la base, mais cette fois-ci pour des valeurs de  $\mu \notin \mathcal{D}$ . Or il s'avère que, sous certaines conditions, cela fonctionne.

Nous avons remarqué que pour les problèmes directement affines/linéaires par rapport à  $\mu$ , i.e. les problèmes pouvant s'écrire :  
trouver  $u \in V$ , tel que  $\forall v \in V$  :

$$\mu_1 a(u, v) = \mu_2 f(v)$$

où  $\mu \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Ou bien, trouver  $(u, p) \in V \times Q$ , tel que  $\forall (v, q) \in V \times Q$  :

$$\begin{cases} \mu_1 a(u, v) + \mu_2 b(p, v) = \mu_3 f(v) \\ b(q, u) = 0 \end{cases}$$

où  $\mu \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ . L'interpolation était alors quasiment exacte, c'est-à-dire que nous obtenons des erreurs de l'ordre de  $10^{-16}$ . C'est le cas de l'exemple dans la partie (4.5). Et dans ces cas précis, l'extrapolation fonctionne aussi bien, sous réserve que la valeur de  $\mu$  considérée ne rende pas le problème mal posé.

Dans les autres cas, l'extrapolation peut fonctionner, mais nous n'avons aucune information sur l'erreur commise. Ainsi il est probable que pour des valeurs de  $\mu$  proches et extérieures à  $\mathcal{D}$ , l'erreur reste du même ordre que l'erreur d'interpolation. Cependant, pour des valeurs éloignées, nous ne savons pas.

La possibilité d'extrapolation semble la aussi liée à l'épaisseur de Kolmogorov de la variété qui contient les solutions  $u(\mu)$ , pour  $\mu \notin \mathcal{D}$ .

# Conclusion

L'étude des bases réduites réalisée pendant ce stage nous a permis d'établir une tête de pont sur un environnement très riche. Chacune des méthodes passées en revue ici (EIM, POD, *greedy*, etc.) méritent des études complètes à elles seules. Ainsi ce document n'a pas pour vocation d'expliquer chaque détail de ces méthodes, l'objectif principal était de comprendre le rôle de chacune d'entre elles dans le cadre des bases réduites.

Nous avons pu voir que pour certain problème il est très simple de construire des bases réduites efficaces, comme celui de la chaleur vu dans la partie (2.4), et pour lequel tout fonctionne bien. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux équations de Stokes pour lesquelles la construction de bases réduites demande plus de travail. Nous avons par ailleurs pu voir les limites de ces bases réduites avec un exemple pour lequel la construction de base est très difficile, voire impossible.

Aux travers de ces différents exemples, nous avons réussi à observer les qualités des bases réduites, à savoir la convergence exponentielle et le gain de calculs/temps. Ces propriétés font la force des bases réduites, en effet elles ouvrent la porte à des résolutions d'EDP temps réel, avec une précision type MEF. Rappelons que seul l'assemblage de la solution dépend de la taille du maillage, ainsi il est possible de résoudre des problèmes sur des maillages très fins, donc très précisément, et le tout très rapidement.

Ce gain de calculs s'avère d'autant plus intéressant dans le cas où une résolution est faite de façon itérative. Avec par exemple les algorithmes de résolution des équations instationnaires. Bien que nous n'ayons pas proposé d'exemple pour illustrer ce gain de temps considérable, il paraît évident que la méthode aux bases réduites paraît parfaitement adaptée à ce genre de situation. Dans un autre contexte de codes itératifs, nous pouvons citer les codes couplant fluide et structure. Ces codes sont souvent imposants et demandent énormément de temps. Ainsi, il paraît très intéressant de déployer des bases réduites pour chacune des résolutions fluide et structure.

Il existe aussi une possibilité d'utilisation des bases réduites que nous n'avons pas encore évoquée. Celle-ci consiste à utiliser une base réduite pour calculer la solution d'un problème instationnaire, à un temps  $t$  quelconque, sans avoir à calculer les itérations temporelles précédentes, voire même sans dépendre d'une quelconque discrétisation en temps.

Nous venons donc de voir que les bases réduites peuvent s'inscrire dans de nombreux contextes. Finalement la conclusion de ce stage, et de ce document, est d'avantage une invitation à poursuivre des recherches sur les différents pans des bases réduites, plutôt qu'une réelle fin.

## Références

- [1] Y. Maday, O. Mula. «Méthode de bases réduites», Summer Schools CEA EDF INRIA 2016.
- [2] S. Veys. « Un framework de calcul pour la méthode des bases réduites : applications à des problèmes non-linéaires multi-physiques », thèse à l’université de Grenoble, 2014.
- [3] O. Mula. «Some contributions towards the parallel simulation of time dependent neutron transport and the integration of observed data in real time», thèse l’Université Pierre et Marie Curie, 2014.
- [4] Y. Maday, A. Patera, G. Turinici. « A Priori Convergence Theory for Reduced-Basis Approximations of Single-Parameter Elliptic Partial Differential Equations », *Journal of Scientific Computing*, Vol. 17, Nos. 1–4, December 2002.
- [5] G. Rozza. «Reduced basis methods for Stokes equations in domains with non-affine parameter dependence», *Comput. Visual Sci.* (2009) 12 : 23.
- [6] G. Rozza. «Fundamentals of reduced basis method for problems governed by parametrized PDEs and applications», *Separated Representations and PGD-Based Model Reduction*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol 554. Springer, Vienna.
- [7] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, A. Patera. «An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations», *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 339 (2004) 667–672.
- [8] K. Ito, S.S. Ravindran. «A Reduced-Order Method for Simulation and Control of Fluid Flows», *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 143, 403–425 (1998).
- [9] Y. Maday, O. Mula, A. Patera, M. Yano. «The Generalized Empirical Interpolation Method : Stability theory on Hilbert spaces with an application to the Stokes equation», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 287 (2015) 310–334.
- [10] Y. Maday, N. C. Nguyen, A. Patera, G.S. Pau. «A general, multipurpose interpolation procedure : the magic points», 2007. <hal-00174797>.
- [11] V. Girault, P.A. Raviart. «Finite Element Methods for Navier -Stokes Equations», Springer, Berlin Heidelberg New York, 1986.
- [12] A. Quarteroni, G. Rozza, A. Manzoni. «Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications», *Journal of Mathematics in Industry* (2011) 1 :3.
- [13] J.S. Hesthaven, G. Rozza, B. Stamm. «Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations», Springer, Cham, 2016.
- [14] G. Rozza, K. Veroy. «On the stability of the reduced basis method for Stokes equations in parametrized domains», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007) 1244–1260.
- [15] G. Allaire. «Conception optimale d structures : Optimisation géométrique (début)», cours 2010.
- [16] Y. Maday, E. M. Ronquist. «A Reduced-Basis Element Method», *Journal of Scientific Computing*, Vol. 17, Nos. 1–4, December 2002.

- [17] N. Nguyen, K. Veroy, A. Patera. «Certified real-time solution of parametrized partial differential equations», Handbook of Materials Modeling, 1529–1564. 2005 Springer.
- [18] L. Iapichino, A. Quarteroni, G. Rozza. «A Reduced Basis Hybrid Method for the Coupling of Parametrized Domains Represented by Fluidic Networks», Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 2012.
- [19] H. Brezis. «Analyse fonctionnelle», Paris, 1983.